

ZUR
NUMERISCHEN BEHANDLUNG
VON
PARAMETRISCHEN
MINIMALFLÄCHEN
MIT
FINITE-ELEMENTEN

Dissertation

zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Helmut Jarausch
aus Duisburg

Bochum · 1978

1979



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546403_0019

ZUR
NUMERISCHEN BEHANDLUNG
VON
PARAMETRISCHEN
MINIMALFLÄCHEN
MIT
FINITE-ELEMENTEN

Dissertation

zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Helmut Jarausch
aus Duisburg

Bochum · 1978

Dissertation eingereicht am 10.11.1978

Tag der mündlichen Prüfung: 11. 6.1979

Dekan: Prof. Dr. V. Baumann

Referent: Prof. Dr. D. Braess

Korreferent: Prof. Dr. W. Jäger (Heidelberg)



MEINEM VATER
IN
LIEBE UND DANKBARKEIT

INHALTSVERZEICHNIS

	Einleitung	1
	Bezeichnungen	8
§ 1	<u>Einführung</u>	
1.1	Grundlegende Eigenschaften und Begriffe	11
1.2	Literaturdiskussion	19
1.3	Motivation	23
§ 2	<u>Das approximative Problem</u>	
2.0	Übersicht	25
2.1	Die approximativen Räume	26
2.2	Formales Problem	31
2.3	Das Verfahren	36
2.4	Zusammenhang mit der COURANT'schen Methode	39
§ 3	<u>Fehlerabschätzung für die linearen Probleme</u>	
3.0	Übersicht	43
3.1	Transformation auf Polarkoordinaten	44
3.2	Abschätzung durch den Approximationsfehler	54
3.3	Approximation im Sobolevraum H_R^s	58
3.4	Die Finite-Element-Räume	64
3.5	Abschätzung des Interpolationsfehlers	69

§ 4	<u>Konvergenz des Verfahrens</u>	
4.0	Übersicht	75
4.1	Voraussetzungen	76
4.2	Vergleichsfunktionen	81
4.3	Ein Störungssatz	88
4.4	Konvergenzsatz	94
§ 5	<u>Behandlung der endlich-dimensionalen Probleme</u>	
5.0	Übersicht	102
5.1	Ein Mehrgitter-Algorithmus	104
5.2	Behandlung des nichtlinearen Problems	113
5.3	Ein Diagonalalgorithmus	116
5.4	Wahl der Startwerte	118
5.5	Die 3-Punkte-Bedingung und Symmetrien	119
5.6	Komplexitätsbetrachtungen	120
§ 6	<u>Numerische Beispiele</u>	
6.0	Allgemeines	122
6.1	Die RIEMANN-SCHWARZ-Fläche	123
6.2	Die WIENER-SCHWARZ-Fläche	125
6.3	Der WIENER-COURANT-Rand	125
6.4	Der ENNEPER-Rand	126
6.5	Ein Hindernisproblem	130
§ 7	<u>Ausblick : Behandlung von Hindernisproblemen</u>	
	Abbildungen	138
	Literaturverzeichnis	156
	Lebenslauf	167

EINLEITUNG

Seit zwei Jahrhunderten beschäftigen sich Mathematiker mit Fragen, die im Zusammenhang mit Minimalflächen stehen. Im Jahre 1849 machte der belgische Physiker J. PLATEAU Versuche, in denen er geschlossene Konturen aus Draht in eine Seifenlösung tauchte und die sich dabei einstellenden Seifenhäute studierte.

Dabei stellt sich eine Seifenhaut so ein, daß die Oberflächenspannungsenergie einen stabilen stationären Punkt einnimmt. Solche Flächen, die nicht notwendig einen minimalen Flächeninhalt haben, heißen Minimalflächen. Die Bestimmung der Minimalflächen, die in eine gegebene Jordankurve Γ gespannt sind, nennt man das PLATEAU'sche Problem.

Mathematisch formuliert sind Minimalflächen stationäre Punkte des Flächenfunktional

$$A(x) := \int_B \|x_u \wedge x_v\|_2 \quad \text{mit } x : B \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \longmapsto (x^1, x^2, x^3)$$

B. RIEMANN, H.A. SCHWARZ und K. WEIERSTRASS erzielten große Fortschritte in der theoretischen Behandlung von Minimalflächen, indem sie die Invarianz des Flächenfunktional gegenüber diffeomorphen Uparametrisierungen des Parametergebietes B ausnutzten.

Bei einer speziellen - konformen - Parametrisierung x der Fläche (siehe §1) stimmt das Flächenfunktional mit dem Dirichletintegral

$$D(x) := \frac{1}{2} \int_B (x_u^2 + x_v^2)$$

überein.

J. DOUGLAS, T. RADO und M. MORSE & C. TOMPKINS

konnten nun zeigen, daß jeder stationäre Punkt des Dirichletintegrals schon konforme Parameter hat.

Damit ist das PLATEAU'sche Problem auf die Suche der kritischen Punkte des quadratischen Dirichletintegrals zurückgeführt. Die Schwierigkeit liegt darin, daß das Dirichletintegral nicht mehr gegenüber allen diffeomorphen Umparametrisierungen invariant ist und damit von der Ränderzuordnung zwischen dem Rand des Parametergebietes ∂B und der gegebenen Jordankurve Γ abhängt. Liegt die Jordankurve in einer Ebene, so ist eine konforme Parametrisierung gerade eine konforme Abbildung des Parametergebietes B in das Innere der Jordankurve. Ähnlich wie bei der Bestimmung einer konformen Abbildung liegt das Hauptproblem in dem Auffinden der 'richtigen' Ränderzuordnung. Ist diese einmal gefunden, so braucht man nur noch die harmonischen Funktionen mit diesen Randwerten zu bestimmen.

Die Freiheit der Ränderzuordnung steckt man bei fester Parametrisierung der Jordankurve über dem Rand ∂B

des Parametergebietes in eine noch unbekannte Umparametrisierung τ von ∂B .

Drückt man mit $D(\tau)$ die Abhängigkeit des Dirichletintegrals von dieser Umparametrisierung aus, so hat man ein Kontrollproblem, bei dem die Kontrolle τ am Rande so einzustellen ist, daß das Dirichletintegral bezüglich aller zulässigen Umparametrisierungen stationär wird.

Man hat also ein zweidimensionales nichtlineares Problem, wie man es bei einer direkten Suche der stationären Punkte des Flächenfunktional erhält, auf ein eindimensionales nichtlineares Kontrollproblem zurückgeführt.

In der Literatur zur numerischen Berechnung von Minimalflächen wird mit einer Ausnahme kein Gebrauch von dieser in der Theorie so erfolgreichen Reduktion des Problems gemacht, sondern es wird direkt das Flächenfunktional benutzt.

Durch diese Reduktion kann man in dem approximativen Problem die Anzahl der nichtlinear eingehenden Variablen reduzieren. Dabei treten jedoch Schwierigkeiten auf.

W.L. WILSON, jr., hat 1961 in seiner Dissertation bei C. TOMPKINS diesen Zugang versucht. Er approximiert die unbekannte Randparametrisierung τ^* von Γ durch eine stückweise lineare Parametrisierung eines in Γ einbeschriebenen Polygonzuges. Bei seiner nun folgenden Variation über solche approximativen Polygonzüge

erhält man denjenigen, der eine (lokal) minimale polyedrische Fläche berandet. Es stellt sich heraus, daß dieser Polygonzug die gegebene Kurve Γ nicht approximiert.

Um dies zu verhindern, nehmen wir eine feste, polygonale Näherung Γ_h mit der stückweise linearen Parametrisierung γ_h . Die Freiheit der Parametrisierung steckt dann in einer noch unbekannten Uparametrisierung τ des Randes des Parametergebietes B .

Identifiziert man ∂B mit $[0, 2\pi]$, so ergibt sich

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{\tau} [0, 2\pi] \xrightarrow{\gamma_h} \Gamma_h .$$

Die Knickstellen von γ_h werden mit

$0 = \beta_1 < \dots < \beta_l < 2\pi$ bezeichnet.

Wenn man nun nicht τ , sondern τ^{-1} stückweise linear in den Punkten (β_k) interpoliert, ist die Inverse τ_h dieser Interpolierenden und damit auch

$$\gamma_h \circ \tau_h : [0, 2\pi] \longrightarrow \Gamma_h$$

stückweise linear. Da das Bild von $[0, 2\pi]$ unter $\gamma_h \circ \tau_h$ fest bleibt, treten solche Schwierigkeiten wie beim Verfahren von WILSON nicht auf. Dafür wird aber eine variable Teilung von $[0, 2\pi]$ durch die Urbilder $\tau_h^{-1}(\beta_k)$, $1 \leq k \leq l$, in Kauf genommen. Die damit notwendige, variable Diskretisierung des Parameter-

gebietes läßt sich mit Finite-Elementen in Polarkoordinaten erreichen. Solche Elemente sind anscheinend bisher noch nicht untersucht worden.

Das sich insgesamt ergebende Verfahren läßt sich als eine endlich-dimensionale Approximation zu einer teilweise unendlich-dimensionalen Approximation auffassen, wie sie von COURANT bei der Untersuchung von instabilen Minimalflächen benutzt wurde.

Nach einer Einführung im §1, in der wir auch auf die verschiedenen Ansätze in der Literatur zur numerischen Behandlung von Minimalflächen eingehen, formulieren wir im §2 ein endlich-dimensionales approximatives Problem und dazu das in dieser Arbeit untersuchte Verfahren.

Wie schon erwähnt, hat man dazu lineare Probleme (LAPLACE-Gleichung) zu lösen, die von nichtlinear eingehenden Parametern in den Randwerten abhängen. Die Fehlerabschätzung für die Näherung der LAPLACE-Gleichung geschieht im §3. Aufgrund einiger Besonderheiten lassen sich die in der Literatur bekannten Fehlerabschätzungen nicht direkt anwenden.

Im §4 betrachten wir die Approximation eines strikten lokalen Minimums des Dirichletintegrals. Unter dieser Voraussetzung können wir die Konvergenz des angegebenen Verfahrens zeigen. Dazu führen wir nichtkonstruktive Vergleichsfunktionen ein und studieren

deren Konvergenz. Damit und mit Hilfe eines Störungssatzes können wir die algorithmisch berechneten Näherungen im Funktional einschließen und mit Hilfe von Kompaktheitsschlüssen die Konvergenz zeigen.

Die Praktikabilität des Verfahrens hängt entscheidend davon ab, daß man die auftretenden Teilprobleme effizient lösen kann. Im §5 gehen wir auf solche Fragen näher ein. Die linearen Gleichungssysteme bei der Finite-Element-Approximation werden mit Hilfe von Mehrgitter-Methoden iterativ gelöst. Die nichtlineare Minimierung geschieht mit einem Algorithmus von DAVIDON. Die geforderte hohe Effizienz erreicht dann ein Diagonalalgorithmus, der den linearen und nichtlinearen iterativen Prozeß kombiniert.

Im §6 wenden wir dieses Verfahren auf Randkurven an, die eine oder mehrere Minimalflächen beranden. Dabei erhalten wir Näherungen für alle aus der Theorie bekannten Flächen in diesen Rändern.

In einem Ausblick im §7 deuten wir an, wie sich das angegebene Verfahren auf Minimalflächen mit Hindernissen ausdehnen läßt.

Die für die vorliegende Arbeit benötigten numerischen Rechnungen wurden auf der Rechenanlage Telefunken TR 440 des Rechenzentrums der Ruhruniversität Bochum durchgeführt. Insbesondere die ausgezeichnete Bochumer Graphiksoft- und hardware ermöglichten erst die schönen Zeichnungen, die in der Kopie leider nicht so plastisch wirken wie im zweifarbigen Original.

Ganz besonders danke ich Herrn Prof. Dr. D. Braess für die Anleitung und ständige Unterstützung dieser Arbeit.

Weiterhin bin ich für viele äußerst wertvolle Diskussionen den Herren Professoren R. Böhme, W. Jäger, R. Jeltsch, J.C.C. Nitsche, M. Reeken, F. Tomi und E. Zehnder zu großem Dank verpflichtet.

Nicht zuletzt möchte ich auch meinem Kollegen, Herrn Dr. W. Mackens, für seine ständige Gesprächsbereitschaft danken.

BEZEICHNUNGEN

$\wedge$	Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$
A	Flächenfunktional $\rightarrow$ §1 (2)
$\forall$	'für alle ...'
$\exists$	'es existiert ...'
B_r	$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2 \}$
B	$:= B_1$
Ω	eine offene Menge im $\mathbb{R}^2$ mit einem Lipschitzstetigen Rand
C	universelle, positive und reelle Konstante, die an verschiedenen Stellen verschiedene Werte haben kann
$C^k(\Omega)$	Banachraum der in Ω k-mal stetig differenzierbaren Funktionen
$C^\omega(\Omega)$	Menge der reell analytischen Funktionen auf Ω
$C^k_0(\Omega)$	Teilraum der Funktionen aus $C^k(\Omega)$ mit kompakten Träger
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	Teilraum der Funktionen aus $C^k(\Omega)$, deren k-te Ableitung noch α -Hölderstetig ist.
$D(.)$	Dirichletintegral $\rightarrow$ §1 (3)
$D(.,.)$	Bilinearform, die aus der quadratischen Form $D(.)$ mittels Polarisation entsteht: $D(x,y) = \frac{1}{4} (D(x+y) - D(x-y))$
Δx	$(\Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)^T$, falls $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit den Komponentenfunktionen x^k

∇x Funktionalmatrix von x

ε eine beliebig kleine reelle Konstante

$H_p^k(\Omega)$ $k \in \mathbb{N}$: Sobolevraum der Distributionen in Ω , deren Ableitung bis zur Ordnung k durch Funktionen aus L_p darstellbar sind

Norm in $H_p^k(\Omega)$ $\|x\|_{k,p,\Omega}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha x\|_{L_p}^p$

Seminorm in $H_p^k(\Omega)$ $|x|_{k,p,\Omega}^p = \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha x\|_{L_p}^p$

$H^k(\Omega) := H_2^k(\Omega)$

$H_p^0(\Omega)$ Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H_p^k(\Omega)$

$H^{-k}(\Omega)$ Dualraum von $H^k(\Omega)$

$H_p^s(\Omega)$ $s = k + \alpha$ mit $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$,
Teilraum der Funktionen aus $H_p^k(\Omega)$, für welche die Seminorm $| \cdot |_{s,p}$ kleiner ∞ ist.

$| \cdot |_{s,p}$ $|x|_{s,p}^p := \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|\partial^\alpha x(s) - \partial^\alpha x(t)|^p}{|s - t|^{N + p\alpha}}$

für $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$H_R^s \rightarrow$ Definition 3.2

L_p Banachraum der zur p -ten Potenz integrierbaren Funktionen

$\mathcal{L}(X, Y)$ Raum der linearen stetigen Funktionen : $X \rightarrow Y$

$f = O(g)$ Falls eine Konstante C existiert, so daß für alle x $|f(x)| \leq C |g(x)|$ gilt.

S^1 Rand von B . S^1 wird häufig mit $[0, 2\pi]$ identifiziert.

$x_n \longrightarrow x$	Die Folge (x_n) konvergiert schwach gegen x .
$X \hookrightarrow Y$	X kann stetig in Y eingebettet werden.
$X \subset\subset Y$	X kann kompakt in Y eingebettet werden.
$X \cong Y$	Die Räume X und Y sind (als topologische Räume) isomorph.

§ 1 EINFÜHRUNG

§ 1.1 Grundlegende Eigenschaften und Begriffe

Wir beginnen mit dem im folgenden zugrundegelegten Begriff 'Fläche' .

1.1 DEFINITION

Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein zusammenhängendes und abgeschlossenes Parametergebiet; dann heißt

$$\begin{aligned} x : P &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x^1, x^2, x^3) \end{aligned}$$

eine verallgemeinerte, parametrische, differential-geometrische Fläche der Klasse C^m , wenn x die folgenden Eigenschaften hat :

- (i) $x \in C^0(P) \cap C^m(\overset{\circ}{P}) \quad m \geq 2 \quad \text{oder} \quad m = \omega$
- (ii) mit Ausnahme von isolierten Punkten in $\overset{\circ}{P}$ verschwindet die Normale $x_u \wedge x_v$ nirgends.

x heißt vom Typ der Kreisscheibe, wenn ihr Parametergebiet P eine Kreisscheibe ist.

Eine topologische Abbildung $\phi : P \longrightarrow P'$ heißt eine zulässige Parametertransformation, wenn ϕ samt seiner Umkehrabbildung im Inneren von P (bzw. P') von derselben Regularitätsklasse C^m ist und die Funktionaldeterminante nirgends verschwindet.

Mit den Bezeichnungen $E = x_u^2$, $F = x_u \cdot x_v$, $G = x_v^2$ heißt eine Parametrisierung x konform (isotherm), wenn in $\overset{\circ}{P}$ folgende Beziehungen gelten :

$$(1) \quad E = G \quad \text{und} \quad F = 0$$

Weiterhin definieren wir, falls die auftretenden Integrale (im Lebesgue-Sinn) existieren,

das Flächenfunktional

$$(2) \quad A(x) := \int_P \sqrt{E \cdot G - F^2}$$

und das Dirichletintegral

$$(3) \quad D(x) := \frac{1}{2} \int_P (E + G) .$$

Ein einfacher, aber für das folgende wichtiger Zusammenhang zwischen dem Flächenfunktional und dem Dirichletintegral ergibt sich aus dem Zusammenhang von geometrischem und arithmetischem Mittel :

$$\sqrt{E \cdot G - F^2} \leq \sqrt{E \cdot G} \leq \frac{1}{2} (E + G)$$

1.2 LEMMA (COURANT(1951))

Sei x eine verallgemeinerte, differentialgeometrische Fläche.

Dann gilt :

$$(i) \quad A(x) \leq D(x)$$

$$(ii) \quad A(x) = D(x) \quad \star \quad x \text{ konform}$$

Gegenüber zulässigen Parametertransformationen verhalten sich die beiden Funktionale unterschiedlich.

Es gilt (vgl. COURANT(1951))

1.3 LEMMA

Das Flächenfunktional A ist gegenüber allen zulässigen Parametertransformationen invariant, während das Dirichletintegral (nur) gegenüber (im Sinne der Funktionentheorie) konformen Parametertransformationen invariant ist.

Zu dem Funktional A gehört (für Flächen mit festem Rand) als EULER-Gleichung das folgende System

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial x_u^k} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial x_v^k} = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq 3$$

mit $W^2 = E \cdot G - F^2$.

Dieses System drückt aus, daß eine Fläche, die das Funktional A stationär macht, überall die mittlere Krümmung Null haben muß. Wir definieren also :

1.4 DEFINITION

Eine Minimalfläche ist eine verallgemeinerte, parametrische, differentialgeometrische Fläche, die überall die mittlere Krümmung Null hat, bzw. die das System (4) erfüllt.

Unter dem PLATEAU-Problem zu einer gegebenen Jordankurve versteht man die Bestimmung von Minimalflächen, die von dieser berandet werden.

Eine Minimalfläche ist nicht notwendig eine Fläche

mit (lokal) kleinstem Flächeninhalt. Im folgenden werden wir uns jedoch überwiegend mit solchen Minimalflächen befassen, obwohl unser Verfahren auch geeignet ist, instabile Flächen zu berechnen.

Die Existenz von Minimalflächen wurde von DOUGLAS(1931) und RADÓ(1930a,1930b) gezeigt :

1.5 SATZ

Sei Γ eine Jordankurve im $\mathbb{R}^3$, die eine Fläche vom Typ der Kreisscheibe mit endlichem Flächeninhalt berandet (dies ist z.B. der Fall, wenn Γ rektifizierbar ist). Dann existiert eine Minimalfläche vom Typ der Kreisscheibe mit kleinstem Flächeninhalt, die von Γ berandet wird.

Es ist nun für das folgende außerordentlich wichtig, daß es immer möglich ist, statt des Flächenfunktionals A das wesentlich einfachere Dirichletintegral D zu benutzen. Dies sichert zusammen mit dem Lemma 1.2 der folgende Satz von BECKENBACH & RADÓ(1933) (siehe auch NITSCHKE(1975, §191)).

1.6 SATZ (Existenz einer konformen Parametrisierung)

Eine von einer Jordankurve Γ berandete Minimalfläche vom Typ der Kreisscheibe besitzt eine Darstellung x mit folgenden Eigenschaften:

- (i) x ist in B harmonisch und in $\bar{B}$ stetig.

- (ii) In B gilt $E = G > 0$ und $F = 0$, d.h. die Parametrisierung ist konform.
- (iii) $x|_{\partial B}$ bildet ∂B topologisch auf Γ ab.

Der Satz 1.6 gibt uns die Möglichkeit, eine Minimalfläche als Lösung eines Dirichletproblems mit geeigneten Randwerten aufzufassen.

1.7 KOROLLAR

Sei Γ eine Jordankurve im $\mathbb{R}^3$ mit der homöomorphen Darstellung $\gamma: \partial B \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3$, welche die Minimalfläche M berandet.

Dann besitzt M eine Darstellung $x: \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit den folgenden Eigenschaften

- (i) $x \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$
- (ii) $\Delta x = 0$ in B
- (iii) (Konformitätsrelation)
- $$|x_u|^2 = |x_v|^2 \quad \text{und} \quad x_u \cdot x_v = 0 \quad \forall (u,v) \in B$$
- (iv) Es gibt eine topologische Abbildung
- $$\tau: \partial B \rightarrow \partial B \quad \text{mit}$$
- (5) (3-Punkte-Bedingung)

τ führt drei fest vorgegebene, paarweise verschiedene Punkte $\alpha_i \in \partial B$ in sich über:

$$\tau(\alpha_i) = \alpha_i \quad i = 1, 2, 3$$

und es gilt

$$x|_{\partial B} = \gamma \circ \tau.$$

BEMERKUNG

Da das Dirichletintegral gegenüber konformen Umparametrisierungen invariant ist (Lemma 1.3), läßt die Forderung einer 3-Punkte-Bedingung an die Umparametrisierung den Wert des Funktionals unverändert.

In der theoretischen und - wie sich zeigen wird - in der numerischen Behandlung der Minimalflächen ist es nun entscheidend, daß die Konformitätsrelation (iii) des Korollars nicht als Nebenbedingung gefordert zu werden braucht, sondern sich in gewissem Sinne 'selbst' einstellt. Zur genaueren Fassung dieses Sachverhaltes benötigen wir die folgenden Begriffe :

1.8 DEFINITION

Sei Γ eine im folgende feste, rektifizierbare Jordankurve im $\mathbb{R}^3$ mit der topologischen Darstellung

$\gamma : \partial B \longrightarrow \Gamma$. Weiter seien α_i wie in (5). Wir betrachten den metrischen Raum

$$T := \{ \tau : \partial B \longrightarrow \partial B \text{ topologisch, } \tau(\alpha_i) = \alpha_i \quad 1 \leq i \leq 3 \}$$

mit der Metrik

$$\tilde{d}(\tau, \sigma) := \sup_{\varphi \in \partial B} |\tau(\varphi) - \sigma(\varphi)| \quad \text{wobei} \\ |\tau(\varphi) - \sigma(\varphi)| \quad \text{die Länge des kürzeren, } \tau(\varphi) \text{ und } \sigma(\varphi) \text{ verbindenden Bogens bedeute.}$$

$x(\tau)$ sei die harmonische Funktion $: B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit den Randwerten $x|_{\partial B} = \gamma \circ \tau$. Schließlich betrachten wir noch die Funktion $d : T \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\tau \longmapsto D(x(\tau))$.

Der folgende Satz stellt fest, daß ein 'kritischer' Punkt von d schon konforme Parameter hat. Für den Fall eines absoluten Minimums wurde dies von DOUGLAS(1931) und RADÓ(1930) gezeigt; der allgemeinere Fall stammt von MORSE & TOMPKINS (1939).

1.9 SATZ

Sei $\tau \in T$ ein (lokales) Minimum von d oder allgemeiner ein homotop kritischer Punkt von d (siehe MORSE & TOMPKINS),

dann ist $x(\tau)$ eine Minimalfläche, und insbesondere erfüllt $x(\tau)$ die Konformitätsrelation.

Damit ist die Suche nach Minimalflächen auf die Bestimmung der kritischen Punkte von d zurückgeführt. Es seien hier noch einige Ergebnisse zur Regularität und der Frage der Eindeutigkeit der Lösung zusammengestellt.

Zum folgenden Satz siehe NITSCHKE(1969) und die dort zitierte Literatur.

1.10 SATZ

Sei Γ eine Jordankurve im R^3 mit der Darstellung $\gamma: \partial B \rightarrow R^3$ und x eine Minimalfläche, die von Γ berandet wird. Dann gilt :

- (i) Ist Γ rektifizierbar, so ist $x|_{\partial B}$ absolut stetig mit $|\dot{x}|_{\partial B}| > 0$ fast überall .

- (ii) Ist $f \in C^1(\partial B)$ mit $f \neq 0$, dann ist x in $\bar{B}$ hölderstetig mit jedem $\alpha < 1/2$.
- (iii) Ist $f \in C^{m,\alpha}(\partial B)$ mit $m \geq 1$, $0 < \alpha < 1$ und $f \neq 0$, so gehört x zur Klasse $C^{m,\alpha}(\bar{B})$.

BEMERKUNG

Diese Ergebnisse gelten auch lokal für Stücke von Γ mit den entsprechenden Voraussetzungen.

Zum Schluß dieses Abschnittes erwähnen wir noch einige Kriterien für die Eindeutigkeit des PLATEAU-Problems. (siehe RADÓ(1932) und NITSCHKE(1973))

1.11 SATZ

Γ sei eine rektifizierbare Jordankurve.

Dann ist das PLATEAU-Problem eindeutig lösbar, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- (i) Γ ist eine ebene Kurve.
- (ii) Γ besitzt eine injektive Parallelprojektion auf eine konvexe Kurve in einer Ebene.
- (iii) Γ besitzt eine injektive Zentralprojektion auf eine konvexe Kurve in einer Ebene.
- (iv) Γ ist eine reguläre analytische Kurve mit einer Totalkrümmung kleiner oder gleich 4π .

§ 1.2 Literaturdiskussion

Die Mehrzahl der Veröffentlichungen zur numerischen Behandlung des PLATEAU-Problems beschäftigt sich speziell mit solchen Minimalflächen, die sich als Graph schreiben lassen (nichtparametrische Flächen).

In diesem Falle hat man eine einfach zusammenhängende konvexe Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und vorgegebene Randwerte $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Funktion $z(u,v)$ mit $z \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ und

$$(6) \quad \begin{aligned} z|_{\partial\Omega} &= g \quad \text{und } z \text{ minimiert das Flächenfunktional} \\ A(z) &= \int_{\Omega} (1 + z_u^2 + z_v^2)^{1/2} \end{aligned}$$

unter allen C^2 -Funktionen mit denselben Werten auf $\partial\Omega$. Die zugehörige EULER-Gleichung (mit denselben Randwerten) lautet:

$$(7) \quad \operatorname{div} \left(\frac{\nabla z}{(1 + |\nabla z|^2)^{1/2}} \right) = 0 \quad \text{oder}$$

$$(1 + z_v^2) z_{uu} - 2 z_u z_v z_{uv} + (1 + z_u^2) z_{vv} = 0$$

Die letzte Gleichung nennt man auch die Minimalflächengleichung.

Als einer der ersten hat GREENSPAN(1965,1967) das Problem (6) numerisch behandelt. Er hat dabei die

Ableitungen z_u und z_v direkt durch Differenzenquotienten ersetzt und das so erhalten diskrete Funktional differenziert. Das dabei entstehende System nichtlinearer algebraischer Gleichungen hat er dann mittels Varianten einer nichtlinearen Overrelaxation gelöst.

CONCUS(1967,1968) diskretisierte demgegenüber die Gleichung (7) und löste die diskreten Gleichungen mit verschiedenen Relaxationsmethoden. Ein ähnliches Vorgehen findet man bei MEIS(1971). CONCUS, GOLUB und O'LEARY(1978) lösten diese Gleichungen mit einer neuen Variante von konjugierten-Gradienten-Verfahren.

Einen ersten Konvergenzbeweis für die Diskretisierung von (7) lieferte FREHSE(1969). Fehlerabschätzungen für Finite-Element-Approximationen zu (6) findet man bei JOHNSON & THOMÉE(1975) und MITTELMANN(1975). Optimale L_∞ -Abschätzungen zeigte RANNACHER(1977).

Neben diesen Arbeiten wurde das Problem auch mit anderen Methoden angefaßt:

KADALBAJOO & JAIN(1977) benutzten eine Art 'Linienmethode', die jedoch auf rechteckige Grundgebiete beschränkt zu sein scheint.

PARKS(1977) löst etwas allgemeiner das Problem für n -dimensionale Hyperflächen, die sich als Graph schreiben lassen, mit Hilfe von Methoden der geome-

trischen Maßtheorie. Er hat interessante $\hat{a}$ -priori Abschätzungen des Fehlers in verschiedenen Normen gegen die Differenz der Flächeninhalte, falls seine Approximationen eine gleichmäßige Lipschitzbedingung erfüllen. JOURON(1975) löst ein allgemeineres Problem, indem er nicht die Konvexität von Ω voraussetzt und außerdem noch unstetige Randwerte zuläßt. Er benutzt Sattelpunktmethoden zur Behandlung der allgemeineren Randwerte.

Schließlich ist noch der Zugang von GABAY & MERCIER (1976) zu erwähnen, die durch ein Entkoppeln der Ansatzfunktion und ihres Gradienten mit Hilfe eines 'Augmented-Lagrange-Funktional's ersatzweise eine Folge von linearen Problemen lösen. Beim Übergang von einem linearen Problem zum nächsten muß für jedes Dreieck der Triangulierung eine nichtlineare Gleichung mit einer Unbekannten gelöst werden.

Neben diesen Verfahren für nichtparametrische Minimalflächen stehen nur wenige Ansätze zur Behandlung des allgemeineren Falles der parametrischen Flächen.

HINATA, SHIMASAKI & KIYONO(1974) konnten in einigen Spezialfällen aufgrund von Symmetrien das parametrische Problem auf ein nichtparametrisches mit einem teilweise freien Rand zurückführen.

Demgegenüber konnte WAGNER(1977) durch einen direkten Variationsansatz für das Flächenfunktional (6) zusam-

men mit einer nichtlinearen Relaxation allgemein parametrische Minimalflächen auch höheren topologischen Typs berechnen. Die Konvergenz dieses Verfahrens wurde bis jetzt noch nicht gezeigt.

Schließlich sollen hier noch erste Arbeiten zur Behandlung des Minimalflächenproblems mit Hindernissen erwähnt werden. Der Fall der nichtparametrischen Flächen ist hierbei von ECKHARDT(1974) und MITTELMANN (1978) behandelt worden. Die Übertragung seiner Methode auf den Hindernisfall zeigte WAGNER(1978).

Die möglicherweise erste numerische Arbeit über Minimalflächen stammt von WILSON(1961,1962). Da WILSON den gleichen Ausgangspunkt wie wir benutzte, soll sein Verfahren hier etwas näher betrachtet werden.

Im Gegensatz zu allen anderen oben erwähnten Arbeiten geht WILSON nicht vom Flächenfunktional (2) aus, sondern er minimiert das Dirichletintegral (3) zunächst bei festen Randwerten und versucht dann durch eine Anpassung der Diskretisierung der gegebenen Jordankurve Γ nochmals über 'alle' Diskretisierungen von Γ zu minimieren. Er geht dabei von einem ebenen Vieleck C aus, das von einem einfachen, geschlossenen Polygonzug mit den Ecken $v_1, \dots, v_N$ berandet wird. Das Innere von C wird durch eine Triangulierung diskretisiert, die im folgenden fest bleibt. Die Ecken $v_1, \dots, v_N$ werden in 'monotonen Art' auf

Punkte $p_1, \dots, p_N$ auf Γ abgebildet. Bei festen Punkten $p_1, \dots, p_N$ löst er zunächst das diskrete Dirichletproblem und erhält eine polyedrische Fläche, die von dem Polygonzug durch $p_1, \dots, p_N$ berandet wird. Da dieser Polygonzug seinerseits Γ approximiert, ist diese polyedrische Fläche eine Approximation zu einem Dirichletproblem mit einer bestimmten Parametrisierung des Randes. WILSON läßt dann die Punkte $p_1, \dots, p_N$ auf Γ 'rutschen'; dabei werden noch 3 Punkte gemäß der Bedingung (3) festgehalten. Auf diese Weise werden $N-3$ Punkte so auf dem Rand Γ verteilt, daß das Dirichletintegral des zugehörigen 'diskret harmonischen' Polyeders minimal wird.

§ 1.3 Motivation

WILSON gibt nur ein sehr spezielles Beispiel an, in dem sein Verfahren funktioniert. Eigene ähnliche numerische Versuche schlugen fehl. Die Situation erklärt sich am besten an Hand eines einfachen Beispiels. Es soll die Minimalfläche, die als Rand eine ebene Ellipse hat, berechnet werden. Die festgehaltenen Punkte der 3-Punkte-Bedingung sind in der Abbildung 1 eingezeichnet. Bei einer anderen Lage dieser Punkte würde sich eine ähnliche Situation ergeben. Beim Verfahren von WILSON wird die Randkurve so

diskretisiert, daß das zugehörige Polyeder ein minimales Dirichletintegral hat, was auch eine möglichst kleine Fläche nach sich zieht. Es stellt sich dann in etwa die in Abbildung 1 skizzierte Approximation ein; d.h. das gefundene Polyeder entartet in ein Dreieck, dessen Ecken die drei festen Punkte sind. Der Rand des Polyeders approximiert in keiner Weise den vorgeschriebenen Rand - die Ellipse. Dieser Effekt kann nicht verhindert werden, solange man die Punkte p_i auf dem Rand verschieblich läßt. Dies ist aber die Grundidee des Verfahrens von WILSON, da ja das Dirichletintegral (im Gegensatz zum Flächenfunktional) entscheidend von der (i.a. unbekannten) Ränderzuordnung abhängt.

Wenn man also aufgrund von Satz 1.6 und Korollar 1.7 das viel einfachere Dirichletintegral benutzen will, muß man dennoch die einmal gewählte polygonale Approximation der Randkurve festhalten und die Freiheit der Parametrisierung in eine Umparametrisierung des Parameterbereiches stecken. Man nimmt dabei die Schwierigkeit von unregelmäßigen Diskretisierungen und die Einschränkung auf Diskretisierungen in Polarkoordinaten in Kauf. Es zeigt sich jedoch, daß diese Schwierigkeiten so gut gelöst werden können, daß sich sogar Vorteile gegenüber anderen Verfahren ergeben. Dies ist der Ausgangspunkt des folgenden Paragraphen.

§ 2 DAS APPROXIMATIVE PROBLEM

§ 2.0 Übersicht

Der Übergang von dem unendlich-dimensionalen Problem zu einem berechenbaren, endlich-dimensionalen, approximativen Problem erfolgt in drei Stufen.

Zunächst wird die bekannte Parametrisierung γ der gegebenen Jordankurve Γ stückweise linear interpoliert. Dabei wird Γ durch einen Polygonzug approximiert. Es ergibt sich die Kurve Γ_h mit der Parametrisierung γ_h . In der zweiten Stufe wird für die unbekannte Umparametrisierung der S^1 ein stückweise linearer Ansatz gemacht. Die endlich-dimensionale Mannigfaltigkeit T_h solcher Umparametrisierungen läßt sich als Approximation des metrischen Raumes T aller zulässigen Umparametrisierungen auffassen (vgl. Def. 1.8).

Ist nun τ_h ein Element aus T_h , so wird schließlich in der dritten Stufe die harmonische Funktion mit den Randwerten $\gamma_h \circ \tau_h$ durch eine geeignete Finite-Element-Approximation genähert.

Insgesamt ergibt sich jeweils bei fester Approximation der Kurve Γ durch (γ_h, Γ_h) ein endlich-dimensionales quadratisches Variationsproblem, das außerdem über nichtlinear eingehende Parameter variiert wird; diese entsprechen der unbekannten Umparametrisierung.

Es wird gezeigt, daß das Minimum dieses Variationsproblems differenzierbar von den Parametern abhängt und daß die partiellen Ableitungen leicht berechenbar sind.

Zum Schluß wird darauf hingewiesen, daß man das endlich-dimensionale Problem auch als zweistufige Näherung auffassen kann, bei der die erste Stufe die von COURANT angegebene Approximation ist.

§ 2.1 Die approximativen Räume

Wenn γ_h die vorgegebene Parametrisierung γ in den festen Punkten

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 2\pi$$

interpoliert, so betrachten wir nur solche stückweise linearen Uparametrisierungen, welche die Punkte t_k als Bilder ihrer Knickstellen haben. Damit stellt man erstens sicher, daß die polygonale Näherung von (γ, Γ) fest bleibt und zweitens daß wegen der höheren Glattheit von γ in (t_{k-1}, t_k) , $1 \leq k \leq N$ sich die optimale Randparametrisierung $\gamma \circ \tau$ auch dann gut approximieren läßt, wenn Γ (endlich viele) Ecken besitzt.

Berücksichtigen wir noch die 3-Punkte-Bedingung,

so kommen wir zu den folgenden approximativen, endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

2.1 DEFINITION

Es seien $0 < \alpha < \beta < N$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ fest.

$$T_h := \left\{ \tau_h : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi] \mid \begin{array}{l} \tau_h \text{ ist stetig und strikt monoton;} \\ \exists s = (s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}^{N(h)} \text{ mit} \\ 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = 2\pi \text{ und} \\ s_k = t_k \text{ für } k \in \{\alpha, \beta\} \text{ und} \\ \tau_h(s_k) = t_k \text{ und } \tau_h|_{[s_{k-1}, s_k]} \text{ ist affin.} \end{array} \right\}$$

Weiter drücke die Schreibweise $\tau_h(s)$ die Abhängigkeit zwischen τ_h und s aus.

Im folgenden wollen wir das Intervall $[0, 2\pi]$ mit der S^1 identifizieren und dann T_h als Teilraum von T auffassen. Benutzen wir die Bezeichnungen aus Definition 1.8, so erhalten wir als approximatives Problem:

- (1) Suche $\tau_h^* \in T_h$ so, daß $d|_{T_h}$ bei τ_h^* stationär wird.

Zur Berechnung von $d(\tau_h)$ muß man das Randwertproblem

$$(2) \quad \Delta x(\tau_h) = 0 \quad \text{in } B$$

$$x(\tau_h)|_{\partial B} = \varphi_h \cdot \tau_h \quad \text{in } \partial B$$

lösen. Die diskrete Approximation dieses Modellproblems ist vielfach behandelt worden. Wir haben jedoch eine variable Diskretisierung des Randes von B mit den Punkten s_k aus Definition 2.1. Wie wir in §3 sehen werden, kann man durch die Verwendung von Finite-Elementen in Polarkoordinaten erreichen, daß der Wert des Dirichletintegrals der Finite-Element-Approximation in 'einfacher' und differenzierbarer Weise von den Punkten s_k und damit von τ_h abhängt. Genauer wird die Diskretisierung von B so beschaffen sein, daß die in der Winkelkoordinate φ stückweise linearen Randwerte $\varphi_h \cdot \tau_h$ aus (2) exakt angenommen werden können. Dies läßt sich bei der Verwendung von (in Polarkoordinaten) bilinearen Elementen erreichen, wenn man dafür Sorge trägt, daß die Punkte s_k Eckpunkte der am Rande liegenden Elemente sind. Wie sich diese Diskretisierung ins Innere von B fortsetzt, entnehme man §3.4.

Wir erhalten so einen approximativen Raum

$$(3) \quad \bar{V}(\tau_h) = H^1(B) \cap C^0(\bar{B})$$

mit der nodalen Finite-Element-Basis $\{\lambda_k(s) \mid 1 \leq k \leq \bar{N}(h)\}$ und s aus Definition 2.1.

Die Dimension dieses Raumes wird sich als nur von h und nicht von s abhängig erweisen. Das Dirichletproblem (2) wird approximiert durch das Variationsproblem,

$$(4) \quad \text{suche } x_h(\tau_h) \in Y(\tau_h) \text{ mit} \\ D(x_h(\tau_h)) = \min_{y \in Y(\tau_h)} D(y)$$

über dem affinen Raum

$$(5) \quad Y(\tau_h) = \left\{ y = (y^1, y^2, y^3) \mid y^k \in \bar{Y}(\tau_h); \quad y|_{\partial B} = \mathcal{F}_h \circ \tau_h \right\}.$$

Wir können eine Funktion y aus $Y(\tau_h)$ mit Hilfe der Finite-Element-Basis aus (3) darstellen.

$$(6) \quad y^k = \sum_{l=1}^N z_{R,l}^k \lambda_l + \sum_{l=1}^M z_{I,l}^k \lambda_{N+l}$$

Dabei seien die Vektoren $z_R^k = (z_{R,1}^k, \dots, z_{R,N}^k)$ und $z_I^k = (z_{I,1}^k, \dots, z_{I,M}^k)$ aus $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{R}^M$ mit $M + N = \bar{N}(h)$.

In (6) seien die ersten N nodalen Basisfunktionen diejenigen, welche zu einem Diskretisierungspunkt auf dem Rande gehören. Sie seien außerdem so numeriert, daß gilt:

$$(7) \quad y^k(s_1) = (\mathcal{F}_h \circ \tau_h(s_1))^k = z_{R,1}^k.$$

Die Gleichung (7) zeigt, daß die Vektoren z_R^k nicht von s abhängen, da für alle s nach Definition von $\tau_h \in T_h$ immer $\tau_h(s_1) = t_1$ gilt. Weiter darf bei dem Variationsproblem (4) mit y in der Darstellung (6) nur über die Koeffizienten z_I^k minimiert werden. Wir zerlegen das Dirichletintegral entsprechend den Komponenten von y .

$$(8) \quad D(y) = \frac{1}{2} (q(y^1) + q(y^2) + q(y^3)) \quad \text{mit} \\ q(y^k) = \int_B \left[(y_u^k)^2 + (y_v^k)^2 \right] .$$

Benutzen wir die positiv definite und symmetrische Bilinearform $q(.,.)$, die sich aus $q(.)$ mittels Polarisation ergibt, und setzen wir die Entwicklung (6) in (8) ein, so erhalten wir

$$(9) \quad D(y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 z^k{}^T \hat{A}(s) z^k \quad \text{mit}$$

$$z^k = (z_R^k, z_I^k)^T \quad \text{und}$$

$$(10) \quad (\hat{A}(s))_{ik} = q(\lambda_i(s), \lambda_k(s)) \quad 1 \leq i, k \leq \bar{N} .$$

Die Matrix $\hat{A}(s)$ ergibt sich als positiv definit und symmetrisch. Auf die langwierigen Rechnungen, die zur Erstellung der Steifigkeitsmatrix $\hat{A}(s)$ nötig sind, werde hier verzichtet, zumal auch in der Praxis $\hat{A}(s)$ durch eine Art Überlagerungsprozeß aus den element-

weisen Steifigkeitsmatrizen mittels Programm erstellt wird. Nähere Einzelheiten findet man in dem Buch von STRANG & FIX(1973).

Das Variationsproblem (4) mit $D(\cdot)$ in der Form (9) und die Abhängigkeit seines Minimums von dem Parameter s untersuchen wir nun rein formal. Dabei genügt es, zur Vereinfachung die Matrix $\hat{A}$ nur von einer Komponente von s abhängen zu lassen. Die Matrix $\hat{A}(s)$ aus (10) erfüllt die im folgenden Abschnitt gemachten Voraussetzungen.

§ 2.2 Formales Problem

Wir betrachten das folgende Funktional

$$(11) \quad F_t(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 z^k T \hat{A}(t) z^k$$

mit $z^k = (z_R^k, z_I^k)^T \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ für $1 \leq k \leq 3$

und der matrixwertigen Funktion

$$\hat{A}(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{(N+M)^2}.$$

Von $\hat{A}(\cdot)$ fordern wir die zweimalige, stetige Differenzierbarkeit nach dem Argument t , und daß für alle t die Matrix $\hat{A}(t)$ positiv definit und symmetrisch ist. Die Vektoren z_R^k seien unabhängig von t .

Zerlegt man $\hat{A}(t)$ gemäß

$$(12) \quad \hat{A}(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{A_R(t)}^N & \overbrace{B(t)^T}^M \\ B(t) & \overbrace{A_I(t)}^M \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} A_R(t) & B(t)^T \\ B(t) & A_I(t) \end{pmatrix}} \right\} N \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} A_R(t) & B(t)^T \\ B(t) & A_I(t) \end{pmatrix}} \right\} M \end{matrix},$$

so erhält man die positiv definiten und symmetrischen Matrizen $A_R(t)$ und $A_I(t)$. Damit geht die Gleichung (11) über in

$$(13) \quad F_t(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left\{ z_I^k \cdot \left[A_I(t) z_I^k + 2 B(t) z_R^k \right] + z_R^k \cdot A_R(t) z_R^k \right\}.$$

Wegen der Definitheit von $\hat{A}$ hat das Funktional (11) bzw. (13) bei festem t und z_R^k bezüglich z_I^k genau ein Minimum, das mit $z_I^k(t)$ bezeichnet werde. Es erfüllt die Variationsgleichung

$$(14) \quad A_I(t) z_I^k(t) = -B(t) z_R^k, \quad 1 \leq k \leq 3.$$

Für den minimalen Wert

$$(15) \quad F(t) := F_t((z_R, z_I(t))^T)$$

des Funktionals (11) erhält man

$$(16) \quad F(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left\{ z_R^k{}^T A_R(t) z_R^k + z_I^k{}^T(t) B(t) z_R^k \right\}.$$

Zur numerischen Berechnung des Funktional (11) am Minimum $(z_R^k, z_I^k(t))^T$ zieht man die Gleichung (13) der Gleichung (16) trotz des etwas höheren Rechenaufwandes vor, da (13) im Gegensatz zu (16) nicht von der exakten Erfüllung der Variationsgleichung (14) abhängt. Dies ist insbesondere deswegen wichtig, weil wir später das System (14) nur näherungsweise mit einem iterativen Verfahren lösen werden und dabei sowieso bei der Berechnung des Residuums die Vektoren $A_I(t) z_I^k$ berechnen müssen.

Die wichtigste Aussage dieses Abschnittes ist, daß sich die Ableitung von $F(\cdot)$ numerisch leicht berechnen läßt. Das liegt vor allem daran, daß sich die Terme, welche die Ableitung von $z_I^k(t)$ enthalten, herausheben.

2.2 LEMMA

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus (15) ist stetig differenzierbar, und seine Ableitung ergibt sich zu

$$(17) \quad \dot{F}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left\{ z_I^k{}^T(t) \left[\dot{A}_I(t) z_I^k(t) + 2 \dot{B}(t) z_R^k \right] + z_R^k{}^T \dot{A}_R(t) z_R^k \right\}.$$

Dabei sind $\dot{A}_I(t)$, $\dot{A}_R(t)$ und $\dot{B}(t)$ die (komponentenweisen) Ableitungen der Matrizen nach dem Parameter t .

2.3 BEMERKUNG

Die abgeleiteten Matrizen sind im konkreten Falle sehr dünn besetzt und haben nur $O(N+M)$ nichtverschwindende Elemente. Der Rechenaufwand zur Auswertung von (17) ist daher von der gleichen Größenordnung wie bei der Auswertung eines Skalarproduktes. Berücksichtigt man, daß t nur eine Komponente eines Vektors mit N Komponenten ist, so ergibt sich der Rechenaufwand zu $O(N(N+M))$. Diese Abschätzung gilt auch dann noch, wenn wir die Berechnung der Ableitungen der Matrizen mit einbeziehen.

Beweis zu Lemma 2.2:

Da $A_I(t)$ für alle t als positiv definit vorausgesetzt wurde, ist $A_I(t)$ invertierbar und die Inverse hängt ebenfalls differenzierbar von t ab. Die Gleichung (14) zieht unmittelbar die Differenzierbarkeit von $z_I^k(t)$ nach sich. Da z_R^k von t unabhängig ist, impliziert (16) die Differenzierbarkeit von $F(t)$.

Zur Berechnung der Ableitung von $F(t)$ eignet sich die Gleichung (13) besser. Es ist zu beachten, daß auch in (13) jetzt z_I^k von t abhängt.

Differentiation von (13) liefert:

$$\begin{aligned} \dot{F}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left\{ \dot{z}_I^k T \left[A_I z_I^k + 2 B z_R^k \right] + \right. \\ \left. + z_I^k T \left[\dot{A}_I z_I^k + A_I \dot{z}_I^k + 2 \dot{B} z_R^k \right] + z_R^k T \dot{A}_R z_R^k \right\}, \end{aligned}$$

und aus der Symmetrie von A_I folgt:

$$z_I^k T A_I z_I^k = z_I^k T A_I z_I^k .$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \dot{F}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left\{ 2 \dot{z}_I^k T \left[A_I z_I^k + B z_R^k \right] + \right. \\ \left. + z_I^k T \left[\dot{A}_I z_I^k + 2 \dot{B} z_R^k \right] + z_R^k T \dot{A}_R z_R^k \right\} \end{aligned}$$

Da der Ausdruck $\left[A_I z_I^k + B z_R^k \right]$ für $1 \leq k \leq 3$ verschwindet, vergleiche die Variationsgleichung (14), erhält man die Gleichung (17) und damit die Behauptung. □

§ 2.3 Das Verfahren

Im Problem (1), (2) ist die gesuchte Umparametrisierung τ_h durch den Vektor s (vgl. Def. 2.1) eindeutig bestimmt. Das Dirichletintegral hängt nach Gleichung (9) über die Matrix $\hat{A}(s)$ von s ab.

Das Minimum des Dirichletproblems (4) bezeichnen wir mit $x_h(s) := x_h(\tau_h(s))$ und den zugehörigen Wert des Dirichletintegrals mit

$$(18) \quad d_h(s) := D(x_h(s)) \quad .$$

Wir studieren die Funktion $d_h(s)$ über der Menge $\uparrow$ aller 'zulässigen Parameter' s .

(19) Restriktion

$$\uparrow := \{s \in \mathbb{R}^{N(h)} \mid \exists \tau_h \in T_h \text{ mit } \tau_h = \tau_h(s)\}$$

BEMERKUNG

Betrachtet man die Menge

$$\{\tilde{s} \in \mathbb{R}^{N(h)-3} \mid \exists s \in \uparrow; \tilde{s} = (s_1, \dots, \hat{s}_\alpha, \dots, \hat{s}_\beta, \dots, s_{N-1})\} \quad ,$$

so ist diese in $[0, 2\pi]^{N(h)-3}$ offen und konvex.

Das Symbol $\hat{}$ zeigt an, daß die entsprechenden Komponenten ausgelassen werden.

Wir können nun unser Verfahren beschreiben. Die Behandlung der dabei auftretenden Hilfsprobleme ist

noch weitgehend offengelassen. Auf die in diesem Zusammenhang auftretenden Fragen wird in §5 näher eingegangen.

2.4 NUMERISCHES VERFAHREN

- (a) Wähle N verschiedene Punkte Γ_k auf der gegebenen Jordankurve Γ so, daß Γ von dem Polyzug γ_h durch die Ecken Γ_k 'möglichst gut' approximiert wird. Dabei müssen die (endlich vielen) Punkte, in denen Γ nicht zweimal stetig differenzierbar ist, zu Γ_k gehören.
- (b) Minimiere die Funktion $d_h(s)$ auf der Menge $\uparrow$!
Man konstruiere dazu eine Minimalfolge so, daß die Werte des Dirichletintegrals monoton fallen.

2.4' NUMERISCHES VERFAHREN

Im Verfahren 2.4 werde der Schritt (b) durch den folgenden ersetzt.

- (b') Bestimme eine Nullstelle von $\text{grad } d_h$.

2.5 BEMERKUNGEN

- (i) Der Schritt (b) im Verfahren 2.4 wird mit einem Quasi-Newton-Verfahren durchgeführt.
Jede Funktionsauswertung erfordert die Lösung eines Dirichletproblems, das mit Hilfe von geeigneten Finite-Elementen approximiert wird.

Die in einem Quasi-Newton-Verfahren benötigte Ableitung $\text{grad } d_h(s)$ kann mit Hilfe von Lemma 2.2 effizient ausgewertet werden.

- (ii) Im Gegensatz zu dem Verfahren von WILSON wird γ_h fest gewählt und während des Verfahrens nicht geändert; daher können solche Entartungen wie bei WILSON hier nicht auftreten.
- (iii) Die Bedingung, daß die Vektoren s in $\uparrow$ liegen müssen, bereitet bei einer iterativen Lösung von (b) keine Schwierigkeiten, da sie in einer Umgebung eines stationären Punktes (echt) erfüllt und damit inaktiv ist.
- (iv) Benutzt man zur Funktionsauswertung des Funktionals die Gleichung (13) statt (16) und dennoch für die Ableitung die Gleichung (17), so braucht man die zur Finite-Element-Approximation benötigten linearen Gleichungssysteme nur näherungsweise zu lösen. Dafür bieten sich insbesondere iterative Verfahren an, wie z.B. die Mehrfachgitter-Methode (siehe §5) .
- (v) Die Wahl von geeigneten Startwerten bei dem iterativen Prozeß in (b) ist unproblematisch. Ein guter Wert läßt sich meist leicht erraten.

Hat das Problem nur eine Lösung oder will man nur irgendeine Lösung berechnen, so kann man immer mit demselben Vektor starten.

Weitere Einzelheiten findet man in §5.4 .

§ 2.4 Zusammenhang mit der COURANT'schen Methode

Für das Verständnis des vorstehend beschriebenen Verfahrens ist ein Vergleich mit der von COURANT angegebenen Methode vorteilhaft. Zu diesem Zwecke sei der Zugang von COURANT kurz erläutert (vgl. COURANT(1951) Chap. VI §§ 6-8).

Gegeben sei ein geschlossener Polygonzug γ im $\mathbb{R}^3$ mit $N+3$ Ecken; dieser sei etwa in eine stückweise glatte Jordankurve einbeschrieben. Der Polygonzug werde über einem Parametergebiet parametrisiert. In unserem Falle ist dies der Rand der Einheitskreisscheibe B . COURANT verwendet in dem oben zitierten Buch den Rand der oberen (komplexen) Halbebene. Wegen der konformen Invarianz des Dirichletintegrals ist dieser Unterschied ohne Bedeutung. Von den $N+3$ Ecken werden drei immer als Bilder dreier im folgenden fester Punkte von B aufgefaßt. Die restlichen N Ecken entsprechen (fortlaufend) den Punkten $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$ im Rand des Parametergebietes. Schreiben wir diese in der Form $\exp(i u_k)$, $1 \leq k \leq N$, so setzen wir

$$U := \{ (u_1, \dots, u_N) \in [0, 2\pi]^N \mid 0 \leq u_1 < \dots < u_N < 2\pi \}.$$

Betrachten wir alle homöomorphen, monotonen Umparametrisierungen von B , die $u_1, \dots, u_N$ als Fixpunkte haben, so nimmt das Dirichletintegral über der Menge der so gewonnenen Parametrisierungen des Polygonzuges γ sein Minimum an. Dieser minimale Wert werde mit $d(u_1, \dots, u_N)$ bezeichnet. d ist eine endlich-dimensionale Funktion auf U . COURANT zeigt nun:

- (i) Die zu $d(u_1, \dots, u_N)$ gehörende minimale harmonische Funktion ist eindeutig bestimmt.
- (ii) Diese minimale harmonische Funktion hängt stetig von den Argumenten $u_1, \dots, u_N$ ab.
- (iii) d hängt stetig differenzierbar von seinen Argumenten ab.
- (iv) Stationäre Punkte von d entsprechen den stationären Punkten des Dirichletintegrals über der Menge aller zulässigen Parametrisierungen von γ ; dabei entsprechen sich auch jeweils lokale Minima und instabile kritische Punkte.

Soweit die Beschreibung der COURANT'schen Methode.

Im Unterschied dazu werden bei dem hier vorliegenden Verfahren auf dem Polygonzug $M+3 \geq N+3$ Punkte gewählt, die über die $N+3$ Ecken von $\mathcal{P}$ noch weitere Punkte enthalten. Zu den zugehörigen Urbildern (unter $\mathcal{P}$)

$$0 \leq v_1 < \dots < v_M < 2\pi$$

wird jetzt eine Funktion $\hat{d}(v_1, \dots, v_M)$ erklärt. Ihr Funktionswert ergibt sich jedoch nicht wie bei d als Minimum über gewisse Umparametrisierungen, sondern als der Wert des Dirichletintegrals für genau die Parametrisierung, welche sich durch stückweise lineare Interpolation der Werte $v_1, \dots, v_M$ ergibt. Dabei stellt man fest, daß aufgrund der Interpolationseigenschaft $\hat{d}$ die Funktion d für $M \rightarrow \infty$ beliebig gut approximiert. Daher ist zu vermuten, daß man asymptotisch alle kritischen Punkte des Dirichletintegrals bekommen kann.

Der Zugang von COURANT legt bei polygonalen Randkurven ein etwas abgewandeltes Verfahren nahe.

Die COURANT'sche Funktion $d(u_1, \dots, u_N)$ ergibt sich als minimaler Wert des Dirichletintegrals bei der Variation über die unendlich dimensionale Mannigfaltigkeit aller monotonen Umparametrisierungen, die neben den festen Punkten der 3-Punkte-Bedingung außerdem noch $u_1, \dots, u_N$ festlassen.

Zur Approximation von d nimmt man noch $M-N$ weitere Punkte in $[0, 2\pi]$ hinzu und approximiert eine Umparametrisierung

trisierung mit einer stückweise linearen Funktion mit den Knickstellen u_k , $1 \leq k \leq M$. Bei festen $u_1, \dots, u_N$ minimiert man über die $M-N$ Punkte $u_{N+1}, \dots, u_M$ statt über die oben erwähnte unendlich-dimensionale Mannigfaltigkeit. Da dieses Minimum, das mit $d'_h(u_1, \dots, u_N)$ bezeichnet werde, eindeutig bestimmt ist, stellt seine Berechnung einen numerisch gutartigen Prozeß dar. Erst in der nächsten Stufe wird d'_h über $u_1, \dots, u_N$ variiert.

Der Vorteil dieses Vorgehens liegt darin, daß selbst bei großem M das numerisch schwierigere nichtlineare Problem nur N Variable hat. Insbesondere bei einer systematischen Suche aller kritischen Punkte mit Hilfe von Fixpunktverfahren bleibt die Dimension der zu untersuchenden Menge klein.

§ 3 FEHLERABSCHÄTZUNG FÜR DIE LINEAREN PROBLEME

§ 3.0 Übersicht

Wir beginnen mit einer Polarkoordinatentransformation, von der wir zeigen, daß sie die Regularität bei einer Verpflanzung von Funktionen aus den Räumen H^s , $1 \leq s \leq 2$, fast erhält. Da wir bei der Randkurve Γ Ecken zulassen, wird die parametrische Darstellung einer in Γ eingespannten Minimalfläche i.A. nur in $H^{1,5}$ liegen.

In der für Finite-Elemente üblichen Weise führen wir den Fehler auf den Approximationsfehler der optimalen Approximation durch den entsprechenden Finite-Element-Raum zurück. Da die Lösung i.A. nur in $H^{1,5}$ liegt, sind Fehlerabschätzungen für die Approximation in Sobolevräumen mit gebrochenem Exponenten nötig. Dies erreichen wir mit einer Abwandlung eines Resultates von BRAMBLE & SCHATZ, das auf der Interpolation von Banachräumen beruht.

Nach der Definition der passenden Finite-Element-Räume beschränken wir den Approximationsfehler durch den Interpolationsfehler. Auf die verschiedenen verwendeten Typen von Elementen lassen sich Resultate von CIARLET & RAVIART für den Interpolationsfehler bei isoparametrischen Elementen anwenden.

Insgesamt können wir bei einem Rand mit Ecken die

Konvergenz in der Energienorm ($\hat{=}$ H^1 -Norm) durch $O(h^{1/2-\epsilon})$ und die Konvergenz der Werte des Dirichletintegrals durch $O(h^{1-\epsilon})$ abschätzen. Zum Schluß wird noch darauf hingewiesen, daß die gewählte Diskretisierung eine fast optimale Kondition der Steifigkeitsmatrix mit sich bringt.

§ 3.1 Transformation auf Polarkoordinaten

Für die spätere Finite-Element-Approximation transformieren wir den Einheitskreis auf das folgende Dreieck

$$(1) \quad \Omega := \{(r, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 1; 0 < \psi < 2\pi r\}$$

mit der Abbildung

$$(2) \quad F : \Omega \longrightarrow B$$

$$(r, \psi) \longmapsto \left(r \cos \frac{\psi}{r}; r \sin \frac{\psi}{r} \right)^T$$

Durch elementares Rechnen zeigt man das folgende

3.1 LEMMA

Seien Ω, F wie in (1) und (2); weiter sei $u \in C^1(B)$ und $\hat{u} := u \circ F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dann gilt mit der Abkürzung $\varphi = \frac{\psi}{r}$

$$(i) \quad F' = \begin{pmatrix} \cos \varphi + \varphi \sin \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi - \varphi \cos \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$F_{rr} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \varphi^2 \cos \varphi \\ \varphi^2 \sin \varphi \end{pmatrix}; \quad F_{\psi\psi} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$F_{r\psi} = +\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \varphi \cos \varphi \\ \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}; \quad J := \det F' = 1.$$

Bezeichnet man mit $\|\cdot\|$ die betragsmäßig größte Komponente, so hat man weiter mit $\varphi \leq 2\pi$

$$\|D F\| \leq 1 + 2\pi; \quad \|D^2 F\| \leq 4\pi^2 / r;$$

F^{-1} existiert und ist stetig differenzierbar mit $\|D F^{-1}\| \leq 1 + 2\pi;$

$$(ii) \quad \left| \nabla u|_{F(r,\psi)} \right|^2 = \left(\hat{u}_r + \frac{\psi}{r} \hat{u}_\psi \right)^2 + \hat{u}_\psi^2.$$

Wir definieren nun die Räume, die sich als Bilder der Räume $H^s(B)$ mit $1 \leq s \leq 2$ unter der Polarkoordinatentransformation ergeben werden.

3.2 DEFINITION

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1; 0 < y < cx\}$$

$$\Gamma_1 := \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq c\}$$

$$\Gamma_2 := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\Gamma_3 := \{(x, cx) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

mit $c = 2\pi$.

Es gilt $\partial\Omega = \bigcup \Gamma_i$.

Da Ω einen Lipschitzstetigen Rand hat, sind die folgenden Randoperatoren als 'trace-Operatoren' wohldefiniert:

$$B_i : H^1(\Omega) \longrightarrow L_2(\Gamma_i)$$

mit

$$(B_1 u)(y) := u(1, y) \quad ; \quad (B_2 u)(x) := u(x, 0) \quad ;$$

$$(B_3 u)(x) := u(x, cx) \quad .$$

Damit definieren wir

$$Y := \{u \in H^1(\Omega) \mid B_1 u = 0 \quad ; \quad (B_2 - B_3) u = 0\}$$

und für $1 \leq s \leq 2$ mit $s \in \mathbb{R}$

$$H_R^s := H^s(\Omega) \cap Y \quad .$$

Daß dies sinnvoll ist, ergibt sich, wenn die Randoperatoren B_i stetig sind. Die Randbedingungen in Y sind dabei nur punktweise fast überall erfüllt.

3.3 LEMMA

Es sei $1 \leq s \leq 2$.

- (i) Die Randoperatoren B_i sind stetige, lineare Abbildungen von $H^s(\Omega)$ nach $L_2(\Gamma_i)$.
- (ii) H_R^s ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $H^s(\Omega)$ und damit selbst ein Hilbertraum.

Beweis:

Da Ω einen Lipschitzstetigen Rand hat, folgt die erste Aussage unmittelbar aus dem trace-Theorem 2.4.2 in NECAS(1967).

Die zweite Aussage ist eine einfache Folgerung aus der ersten Aussage. □

Wir zeigen nun, daß die Transformation auf Polarkoordinaten die Regularität 'fast' erhält.

3.4 SATZ

Sei F die Transformation gemäß (2) und

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L_2(B) &\longrightarrow L_2(\Omega) \\ u &\longmapsto \hat{u} := u \circ F \end{aligned}$$

Dann gilt:

- (i) $\mathcal{F}$ ist ein Isomorphismus von $H^0_1(B)$ nach H^1_R .

(ii) Liegt u zusätzlich in $H_{\infty}^1(B_g)$ mit einem $0 < g < 1$, so ist für alle $0 < \beta \leq 1$ und $0 < \alpha < \beta$

$$F \in \mathcal{L}(H^{1+\beta}(B) \cap H^1(B) \cap H_{\infty}^1(B_g), H_R^{1+\alpha}) .$$

Beweis:

Sei $u \in H^1(B)$ und $(u_i) \subset C_O^1(B)$ mit $u_i \xrightarrow{H^1(B)} u$; dann ist $\hat{u}_i = u_i \circ F$ aus $C^1(\Omega)$ mit $\hat{u}_i' = u_i'(F) \circ F'$ und

$$\int_{\Omega} \|\hat{u}_i'\|^2 \leq \|F'\|_{L_{\infty}(\Omega)}^2 \cdot \int_B \|u_i'\|^2 \frac{1}{J} \leq C \|u_i\|_{H^1(B)}^2 .$$

Ebenso gilt wegen $J = 1$ auch $\|\hat{u}_i\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u_i\|_{L_2(B)}$ und damit $\hat{u} \in H^1(\Omega)$ mit

$$\|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(B)} .$$

Wegen $\hat{u}_i(1, \psi) = 0$ für $1 \leq \psi \leq 2\pi$ und

$\hat{u}_i(r, 0) = \hat{u}_i(r, 2\pi r)$ für $0 \leq r \leq 1$ und der Stetigkeit der trace-Operatoren liegt $\hat{u}$ in H_R^1 .

Sei umgekehrt $\hat{u} \in H_R^1$ und $u := \hat{u} \circ F^{-1}$.

Wir teilen Ω auf.

$$\Omega_1 := \{(r, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 1; 0 < \psi < \pi r\} \quad \text{und}$$

$$\Omega_2 := \{(r, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 1; \pi r < \psi < 2\pi r\}$$

Es gilt $\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \overline{\Omega}$ und die Gebiete Ω_i haben stückweise glatten Rand. Weiter sei $K_i := F(\Omega_i)$.

Mit den Abschätzungen für $(F^{-1})'$ und J nach Lemma 3.1 folgt analog wie oben $u|_{K_i} \in H^1(K_i)$ und $\|u|_{K_i}\|_{H^1(K_i)} \leq C \|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)}$.

Offensichtlich erfüllen die Halbkreise K_i die Voraussetzungen des GAUSS'schen Satzes. Um $u \in H^1(B)$ nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß für $k = 1, 2$ eine Funktion u_k aus $L_2(B)$ existiert mit:

$$\forall v \in C_0^\infty(B) \quad \int_B u_k v = - \int_B u \partial_k v.$$

Mit dem GAUSS'schen Satz gilt, da $u|_{K_i} \in H^1(K_i)$,

$$\int_{K_i} \partial_k (u|_{K_i}) v = - \int_{K_i} u|_{K_i} \partial_k v + \int_{\partial K_i} u|_{K_i} v \nu_{K_i}^k.$$

Wir setzen $u_k(x) := \left\{ \partial_k (u|_{K_i}) \text{ für } x \in K_i \text{ und summieren:} \right.$

$$\int_B u_k v = - \int_B u \partial_k v + \sum_{i=1}^2 \int_{\partial K_i} u|_{K_i} v \nu_{K_i}^k$$

Wegen $\hat{u} \in H_R^1$ und $v \in C_0^\infty$ sieht man leicht, daß die

Randintegrale sich gegenseitig wegheben. Damit ist

$\partial_k u = u_k$ im Distributionssinne, und da u_k in $L_2(B)$ liegt, ist u in $H^1(B)$.

Weiter haben wir $\|u\|_{H^1(B)} \leq C \|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)}$.

Analog wie im ersten Teil folgt nun auch $u \in H_0^1(B)$.

Zur Aussage (ii)

Wegen Teil (i) genügt es zu zeigen, daß die Seminorm

$$[\hat{u}]_{\alpha}^2 := \int_{\Omega \times \Omega} \frac{\|\hat{u}'(x) - \hat{u}'(y)\|^2}{\|x-y\|^{2+2\alpha}} dx dy$$

für $\alpha < \beta$ beschränkt ist. Mit der Kettenregel und Lemma 3.1 gilt

$$[\hat{u}]_{\alpha}^2 \leq C (I_1 + I_2) \text{ mit}$$

$$I_1 := \int_{\Omega \times \Omega} \|u'(Fx)\|^2 \frac{\|F'(x) - F'(y)\|^2}{\|x-y\|^{2+2\alpha}}$$

$$I_2 := \int_{\Omega \times \Omega} \|F'(y)\|^2 \frac{\|u'(Fx) - u'(Fy)\|^2}{\|Fx - Fy\|^{2+2\alpha}}.$$

Schätzen wir zunächst I_2 ab. Da nach Lemma 3.1

$F' \in L_{\infty}(\Omega)$, $\det F' = 1$ und sich $F(\Omega)$ von B nur durch eine Nullmenge unterscheidet, gilt

$$I_2 \leq C \int_{B \times B} \frac{\|u'(x) - u'(y)\|^2}{\|x-y\|^{2+2\alpha}} \leq C \|u\|_{H^{2+1+\alpha}(B)}^2$$

$$\leq C \|u\|_{H^{2+1+\beta}(B)}^2 \text{ für alle } \alpha \leq \beta.$$

Zur Abschätzung von I_1 wählen wir ein ξ' mit $0 < \xi' < \xi$ und teilen $\Omega \times \Omega$ folgendermaßen auf:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &:= F^{-1}(B_g) & ; & \quad \Omega_1 := F^{-1}(B_g \setminus B_g) & ; \\ \Omega_2 &:= F^{-1}(B \setminus B_g) \\ \Omega_3 &:= \Omega_0 \cup \Omega_1 & ; & \quad \Omega_4 := \Omega_1 \cup \Omega_2 & ; \\ \Omega \times \Omega &= (\Omega_3 \times \Omega_3) \cup (\Omega_4 \times \Omega_4) \cup (\Omega_0 \times \Omega_2) \cup (\Omega_2 \times \Omega_0)\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit I_3, I_4, I_5, I_6 die Integral mit demselben Integranden wie I_1 , jedoch über die Mengen $\Omega_3 \times \Omega_3$, $\Omega_4 \times \Omega_4$, $\Omega_0 \times \Omega_2$, $\Omega_2 \times \Omega_0$, so können wir I_1 abschätzen.

$$I_1 \leq I_3 + I_4 + I_5 + I_6$$

Wegen $\|x-y\| \geq C > 0$ für $(x,y) \in (\Omega_0 \times \Omega_2) \cup (\Omega_2 \times \Omega_0)$

sind I_5 und I_6 trivialerweise beschränkt, da F' in L_∞ und u' in L_2 liegt.

Wir untersuchen zuerst I_4 . In $\Omega_4 \times \Omega_4$ ist F zweimal stetig differenzierbar, und die zweite Ableitung ist demnach in der L_∞ -Norm beschränkt.

Es gilt also mit Hölder:

$$I_4 \leq C \int_{\Omega_4 \times \Omega_4} \|u'(Fx)\|^2 \frac{\|x-y\|^2}{\|x-y\|^{2+2\alpha}}$$

$$(3) \leq C \|u' \circ F\|_{L_{2q}}^2 \cdot \| \|x-y\|^{-2\alpha} \|_{L_p}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und L_{2q} bzw. L_p bezogen auf $\Omega_4 \times \Omega_4$.

Da Ω ein zweidimensionales Gebiet ist, kann man den

Term $\| \|x-y\|^{-2\alpha} \|_{L_p}$ beschränken, falls

(4) $\alpha p < 1$ gilt.

Nach dem Einbettungssatz Theorem 9 in USPENSKII(1962) gilt $H^{1+\beta}(B) \hookrightarrow H_{\tilde{q}}^1(B)$ mit $\tilde{q} = 2/(1-\beta)$ für $\beta < 1$ und $\tilde{q} < \infty$ beliebig für $\beta = 1$.

Da u in $H^{1+\beta}(B)$ liegt, ist u' auch in $L_{\tilde{q}}(B)$.

In (3) wählen wir $q = 1/(1-\beta)$ und $p = 1/\beta$. Bei

$\beta = 1$ kann man $p > 1$ beliebig nahe bei 1 wählen.

Mit $\alpha < \beta$ gilt dann (4) und daher die Beschränktheit von I_4 .

Bei der Abschätzung von I_3 genügt es wegen $u' \in L_{\infty}(B_f)$ zu zeigen, daß

$$|F|_{1+\alpha, 2} \leq \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|F'(x) - F'(y)|^2}{|x-y|^{2+2\alpha}}$$

für $\alpha < 1$ beschränkt ist. Aus Lemma 3.1 folgt die Abschätzung $\|F''\| \leq \frac{C}{r}$ und daher liegt F in $H_p^2(\Omega)$ für alle $p < 2$. Nach dem Einbettungssatz von

USPENSKII gilt

$$H_p^s \hookrightarrow H_q^t \text{ mit } 1 < p < q < \infty \text{ und } s - \frac{n}{p} = t - \frac{n}{q},$$

wobei die Dimension n hier gleich 2 ist.

F liegt also in H_2^t mit $t = 2 - (\frac{2}{p} - 1)$.

Daher ist $|F|_{1+\alpha, 2}$ für alle $\alpha < 1$ beschränkt und der Satz vollständig bewiesen. $\square$

3.5 BEMERKUNG

Schätzt man den Ausdruck

$$\int_{\Omega \times \Omega} \frac{\|F'(x) - F'(y)\|^{2p}}{\|x - y\|^{(2+2\alpha)p}} ,$$

der für $p = 1$ gleich $\|F\|_{1+\alpha,2}$ wird, in etwas mühsamer Rechnung explizit ab, so kann man ihn unter der Bedingung $p(1+\alpha) < 2$ beschränken.

Stellt man an α und β die Bedingung

$$(1+\alpha) / \beta < 2 ,$$

so kann man auf die Voraussetzung $u \in H_{\omega}^1(B_g)$ verzichten. Man erhält jedoch einen ziemlich großen Regularitätsverlust für β nahe bei 1,5 .

§ 3.2 Abschätzung durch den Approximationsfehler

Das beim Verfahren 2.4 auftretende lineare Problem ist das Dirichletproblem

$$(5) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } B \\ u|_{\partial B} = g \quad \text{auf } \partial B ;$$

(6) dabei ist $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und stückweise affin mit $g(0) = g(2\pi)$. Daher liegt g in $H^1(\partial B)$.

Die Existenz und Regularität der Lösung von (5), (6) fassen wir im folgenden Satz zusammen:

3.6 SATZ

Unter der Voraussetzung (6) hat das Problem (5) genau eine Lösung im Raume $H^{1,5}(B)$.

Beweis:

Die folgenden Zitate und Seitenangaben beziehen sich auf LIONS & MAGENES(1968) Chap. 2 .

Nach Theorem 2.7.4 gibt es genau eine Lösung im Raume $H^{1,5}(B)$. Genauer kann man zeigen, daß die Lösung in dem etwas kleineren Raume $D_A^{1,5}(B)$ liegt (siehe S. 199).

Wir wählen nun ein $\hat{g} \in H^{1,5}(B)$ mit $\hat{g}|_{\partial B} = g$ so, daß $f := \Delta \hat{g}$ in $H^{-1}(B)$ liegt. Nach den Theoremen 2.7.3 und 2.7.4 ist dies möglich, wenn $\hat{g}$ in dem etwas kleineren Raume $D_A^{1,5}(B)$ liegt.

Das Problem (5) wird äquivalent zu dem Variationsproblem

$$(7) \quad \text{minimiere in } H^1(B) \text{ das Funktional} \\ \mathcal{D}(u_0) := D(u_0) - \langle f, u_0 \rangle !$$

Dabei ist $\langle, \rangle$ die duale Paarung zwischen $H^1(B)$ und $H^{-1}(B)$.

Wir transformieren nun mit Hilfe von $\mathcal{F}$ aus dem Satz 3.4 das Funktional $\mathcal{D}$ aus (7).

Für $v \in H_R^1$ sei

$$(8) \quad \tilde{\mathcal{D}}(v) := \mathcal{D}(\mathcal{F}^{-1}v) = \tilde{D}(v) - \tilde{L}(v) \quad \text{mit}$$

$$(9) \quad \tilde{D}(v) := D(\mathcal{F}^{-1}v) \quad \text{und} \quad \tilde{L}(v) := \langle \mathcal{F}^{-1}v, f \rangle .$$

Wir erhalten das Problem

$$(10) \quad \text{suche} \quad \min_{v \in H_R^1} \tilde{\mathcal{D}}(v) !$$

Daneben betrachten wir für einen abgeschlossenen Teilraum $V_h \subset H_R^1$ das Problem

$$(11) \quad \text{suche} \quad \min_{v_h \in V_h} \tilde{J}(v_h) \quad .$$

Aufgrund des Zusammenhanges (8), (9) genügt es, Fehlerabschätzungen für das Funktional $\tilde{J}$ zu suchen.

3.7 SATZ

Das Problem (10) bzw. (11) hat genau eine Lösung v^* bzw. v_h^* und es gilt:

$$(i) \quad \|v^* - v_h^*\|_{H_R^1} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|v^* - v_h\|_{H_R^1}$$

$$(ii) \quad \tilde{J}(v_h^*) - \tilde{J}(v^*) \leq C \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|v^* - v_h\|_{H_R^1} \right\}^2 .$$

(iii) Ist u^* die Lösung des Problems (7), so ist $\mathcal{F}u^*$ die Lösung des Problems (10) .

Beweis:

Wir führen die Bilinearform

$$\tilde{D}(u, v) := D(\mathcal{F}^{-1}u, \mathcal{F}^{-1}v) \quad \text{mit} \quad u, v \in H_R^1 \quad \text{ein.}$$

Mit Hilfe der Ungleichungen von Hölder und Poincaré ist die Bilinearform $D(u, v)$ stetig und koerzitiv auf $H^1(B)$, d.h.

$$\forall u, v \in H^1(B) : |D(u, v)| \leq M \|u\|_{H^1(B)} \cdot \|v\|_{H^1(B)}$$

und

$$D(u, u) \geq c \|u\|_{H^1(B)}^2 \quad \text{mit} \quad c > 0 .$$

Mit dem Satz 3.4(i) gilt dies dann auch für die Bilinearform $\tilde{D}$ in H_R^1 ; die Koerzitivität sieht man z.B. folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\tilde{D}(u,u) &= D(\mathcal{F}^{-1}u, \mathcal{F}^{-1}u) \geq c \|\mathcal{F}^{-1}u\|_{H^1(B)}^2 \\ &\geq \frac{c}{M^2} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(H^1(B), H_R^1)}^{-2} \cdot \|\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}u\|_{H_R^1}^2.\end{aligned}$$

Weiterhin ist $\langle \cdot, f \rangle$ wegen $f \in H^{-1}(B)$ eine stetige Linearform auf $H^1(B)$. Nach Satz 3.4 ist auch $\tilde{L}$ aus (9) stetig und linear.

Damit sind die Voraussetzungen für das LAX-MILGRAM-Lemma (siehe z.B. Th. 1.1.3 in CIARLET(1978)) erfüllt, das die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der Probleme (10) und (11) sichert. Die Behauptung (i) folgt nun unmittelbar aus dem CÉA-Lemma (siehe Th. 2.4.1 in CIARLET(1978)).

Nach Theorem 1.1 und dessen Korollar in STRANG & FIX (1973) ist

$$\begin{aligned}\tilde{D}(v^* - v_h^*) &= \tilde{D}(v^*) - \tilde{D}(v_h^*) \quad \text{und} \\ \tilde{\mathcal{D}}(v^*) &= -\tilde{D}(v^*) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{D}}(v_h^*) = -\tilde{D}(v_h^*) .\end{aligned}$$

Damit gilt weiter

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{D}}(v_h^*) - \tilde{\mathcal{D}}(v^*) &= \tilde{D}(v^*) - \tilde{D}(v_h^*) = \tilde{D}(v^* - v_h^*) \\ &\leq M \|v^* - v_h^*\|_{H_R^1}^2 \leq C \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|v^* - v_h\|_{H_R^1} \right\}^2 .\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt aus der Stetigkeit der Bilinearform $D(.,.)$, während die letzte Ungleichung nach Teil (i) gilt.

Zum Nachweis der dritten Aussage sei $w \in H_R^1$ mit $\tilde{J}(w) < \tilde{J}(F_{u^*})$. Wegen (6) wäre dann aber $J(F^{-1}w) = \tilde{J}(w) < \tilde{J}(F_{u^*}) = J(u^*)$, was aber unmöglich ist.

Damit ist Satz 3.7 vollständig bewiesen. $\square$

§ 3.3 Approximation im Sobolevraum H_R^s

Im vorigen Abschnitt wurde die Fehlerabschätzung für die Finite-Element-Approximation des Dirichletproblems auf eine Abschätzung des Approximationsfehlers

$\inf_{v_h \in V_h} \|v^* - v_h\|_{H_R^1}$ zurückgeführt.

Da nach Satz 3.6 die exakte Lösung i.A. nur in dem Sobolevraum $H^{1,5}$ liegt, benötigen wir ein Resultat über die Approximation in Sobolevräumen mit gebrochenem Exponenten. Ein solches Resultat findet man bei BRAMBLE & SCHATZ(1971), jedoch nur für Räume ohne Randbedingungen. Wir wenden einen abstrakten Approximationssatz von BRAMBLE & SCHATZ auf die Räume H_R^s an, die teilweise Nullrandbedingungen und teilweise periodische Randbedingungen enthalten.

Der Satz 3.8 stellt eine für das folgende ausreichende Vereinfachung des Approximationssatzes Theorem 3.1 aus BRAMBLE & SCHATZ(1971) dar. Die Voraussetzungen (i) und (ii) des Satzes sind für Räume, die man mittels Interpolation von zwei Banachräumen $X(0) \hookrightarrow X(1)$ erhält, immer erfüllt.

3.8 SATZ

$X(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 1$, sei eine 1-parametrische Schar von Banachräumen mit den Eigenschaften:

(i) $\forall 0 \leq \theta < \theta' \leq 1$ gilt $X(\theta') \hookrightarrow X(\theta)$ und

$$\|\cdot\|_{X(\theta)} \leq C(\theta, \theta') \|\cdot\|_{X(\theta')}.$$

(ii) Für jeden festen Banachraum Y und

$T \in \mathcal{L}(X(0), Y) \cap \mathcal{L}(X(1), Y)$ mit

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X(0), Y)} \leq m_0; \quad \|T\|_{\mathcal{L}(X(1), Y)} \leq m_1$$

gelte für alle $0 < \theta < 1$: $T \in \mathcal{L}(X(\theta), Y)$;

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X(\theta), Y)} \leq C(\theta) m_0^{1-\theta} \cdot m_1^{\theta}.$$

(iii) Weiter sei für feste $0 \leq \beta < 1$ und $\epsilon > 0$

eine Familie S^h , $0 < h \leq 1$, von in $X(0)$ und

in $X(\beta)$ abgeschlossenen Teilräumen gegeben,

welche die folgende Abschätzung erfüllen:

$$\forall u \in X(1) : \inf_{v \in S^h} \|u-v\|_{X(\beta)} \leq C h^{\epsilon} \|u\|_{X(1)}.$$

Die Konstante in Voraussetzung (iii) sei von u und h unabhängig.

Behauptung:

Für alle $0 < \theta \leq 1$ und für alle $u \in X(\theta)$ gilt

$$\inf_{v \in S^h} \|u-v\|_{X(0)} \leq C(\theta) h^{\theta(1+\beta(1-\beta))} \|u\|_{X(\theta)}$$

Wir wenden diesen Satz auf die Approximation in den Räumen H_R^S an. Vorher müssen wir zeigen, daß bei der Interpolation zwischen den Räumen H_R^1 und H_R^2 die in diesen Räumen gültigen Randbedingungen erhalten bleiben. Die reelle Interpolation zwischen Banachräumen kann man wie folgt definieren:

Seien X_0 und X_1 abgeschlossene Teilräume des Banachraums X . Der Raum

$$X_0 + X_1 := \{z \in X \mid \exists x_0 \in X_0, \exists x_1 \in X_1 : z = x_0 + x_1\}$$

wird mit der Norm

$$K(t, z) := \inf_{z = x_0 + x_1} (\|x_0\|_{X_0} + t \|x_1\|_{X_1}) \quad \text{für } t > 0$$

ein Banachraum.

Mit Hilfe des Funktionals

$$\Phi_{\theta,p}(\varphi) := \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} [\varphi(t) t^{-\theta}]^p \frac{dt}{t} \right\}^{1/p}$$

für eine meßbare Funktion $\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ und
 $0 < \theta < 1$, $1 \leq p < \infty$, definieren wir für alle $z \in X_0 + X_1$

$$\|z\|_{\theta,p} := \Phi_{\theta,p}(K(.,z)) \quad \text{und}$$

$$[X_0, X_1]_{\theta,p} := \{ z \in X_0 + X_1 \mid \|z\|_{\theta,p} < \infty \}.$$

Der Raum $[X_0, X_1]_{\theta,p}$ wird mit der Norm $\|\cdot\|_{\theta,p}$ ein Banachraum, der 'zwischen' den Räumen X_0 und X_1 liegt. Man sagt, er sei durch reelle Interpolation aus den Räumen X_0 und X_1 entstanden.

Die hier angegebene Definition wird als K-Methode bezeichnet. Zu dieser und anderen äquivalenten Definitionen vergleiche man BERGH & LÖFSTRÖM(1976) Chap. 3.

Wir zeigen nun, daß bei Interpolation die Randbedingungen in den Räumen H_R^s erhalten bleiben.

3.9 LEMMA

Für $0 < \theta < 1$ gilt

$$H_R^{1+\theta} \hookrightarrow X(\theta) := [H_R^1, H_R^2]_{\theta,2}.$$

Beweis:

Zunächst gilt $[H^1(\Omega), H^2(\Omega)]_{\theta,2} = H^{1+\theta}(\Omega)$.

Dies folgt für $\Omega = \mathbb{R}^n$ aus Theorem 6.4.5(5) in

BERGH & LÖFSTRÖM(1976) und dann für Ω aus der Definition 3.2 mittels des Fortsetzungssatzes von STEIN(1970,Th. VI.5), der bei STEIN nur für $H^k(\Omega)$ bzw. $H^k(\mathbb{R}^n)$ mit $k \in \mathbb{N}$ formuliert ist. Dieser Satz läßt sich jedoch mit Hilfe des Interpolationssatzes Theorem I.3.1 in LIONS & PEETRE(1964) auch auf reelles s , $1 \leq s \leq 2$, ausdehnen.

Nach dem 'Density-Theorem' III.2.1 in LIONS & PEETRE liegt $H_R^1 \cap H_R^2 = H_R^2$ dicht in $X(\theta)$, und nach dem Interpolationssatz gilt dann wieder $X(\theta) \hookrightarrow H^{1+\theta}(\Omega)$. Da nach Lemma 3.3 die Randoperatoren B_i auf $H^{1+\theta}(\Omega)$ stetig sind, folgt aus der Dichtheit von H_R^2 in $X(\theta)$ die Behauptung. $\square$

Wir kommen nun zu dem angestrebten Approximationssatz.

3.10 SATZ

Es sei S^h , $0 < h \leq 1$ eine Familie von in H_R^1 abgeschlossenen Teilräumen mit der Eigenschaft:

$$(12) \quad \forall u \in H_R^2 : \inf_{v \in S^h} \|u-v\|_{H_R^1} \leq C h \|u\|_{H_R^2}$$

mit einer von u und h unabhängigen Konstante C .

Behauptung:

Für $0 < \theta < 1$ und alle $u \in H_R^{1+\theta}$ gilt

$$\inf_{v \in S^h} \|u-v\|_{H_R}^1 \leq C(\theta) h^\theta \|u\|_{H_R}^{1+\theta}$$

mit einer von h und u unabhängigen Konstante $C(\theta)$.

Beweis:

Wir wenden Satz 3.8 mit $X(\theta)$ aus Lemma 3.9 und S^h aus der Voraussetzung mit $\beta = 0$ und $\sigma = 1$ an. Die Voraussetzung (i) folgt unmittelbar aus der Definition der Räume $X(\theta)$ (siehe LIONS & PEETRE (1964) § 1.2). Die Voraussetzung (ii) folgt aus dem Interpolationstheorem I.3.1 in LIONS & PEETRE und die Voraussetzung (iii) ist auch hier (mit $\beta = 0$ und $\sigma = 1$) vorausgesetzt. Aus Satz 3.8 folgt also

$$\inf_{v \in S^h} \|u-v\|_{H_R}^1 \leq \tilde{C}(\theta) h^\theta \|u\|_{X(\theta)}.$$

Lemma 3.9 liefert $H_R^{1+\theta} \hookrightarrow X(\theta)$ und damit die Behauptung. □

§ 3.4 Die Finite-Element-Räume

Wir wollen für unsere Zwecke geeignete Räume S^h konstruieren. S^h wird im wesentlichen ein endlich-dimensionaler Teilraum (daher abgeschlossen) von stückweise bilinearen Finite-Elementen.

Die Transformation F (bzw. F^{-1}) gemäß (2), mit deren Hilfe das Problem von B auf Ω transformiert wird, hat für die tatsächliche numerische Rechnung keine Bedeutung, da dort direkt in B gerechnet wird. Eine direkte Abschätzung des Fehlers bei der Approximation mit diesen Elementen erweist sich jedoch als schwierig, da z.B. eine Anwendung der Resultate von CIARLET & RAVIART (1972b) für krummlinige Elemente an der Singularität der zweiten Ableitung der Polarkoordinatentransformation scheitert. Wir können diese Resultate jedoch mit Erfolg auf die transformierten Elemente in Ω anwenden.

Unser Ziel ist der Nachweis der Voraussetzung (12) des Satzes 3.10 .

Wir erklären zunächst nur 'äquidistante' Diskretisierungen des Einheitskreises B . Diese werden nur für $h = 2^{-1}$ mit $1 \in \mathbb{N}$ erklärt. Man könnte allgemeinere 'h-Folgen' zulassen, jedoch ergeben sich aus praktischen Erwägungen bei der Lösung der linearen Gleichungssysteme mit der Mehrfachgittermethode Einschränkungen (siehe §5).

Die Diskretisierungen werden mit $\mathcal{L}_1$ bezeichnet.

$\mathcal{L}_1$ teilt den Kreis $B_{1/2}$ in 4 gleichgroße Sektoren, und der Kreisring $B_1 \setminus B_{1/2}$ wird durch radiale Schnitte in 8 gleiche Teile geteilt.

$\mathcal{L}_{k+1}$ ergibt sich aus $\mathcal{L}_k$ folgendermaßen:

Der Kreis $B_{1/2}$ wird so diskretisiert wie vorher B_1 gemäß $\mathcal{L}_k$. Der Ring $B_1 \setminus B_{1/2}$ wird durch konzentrische Kreise in 2^k Teile und dann durch 2^{k+3} radiale Schnitte nochmals aufgeteilt. Siehe dazu die Abbildungen 4-7, die $\mathcal{L}_1$ bis $\mathcal{L}_4$ darstellen.

Im allgemeinen Fall haben alle Elemente von $\mathcal{L}_k$ (in Polarkoordinaten) die Form

$$E_{m,n} := \left\{ (r, \varphi) \mid m \Delta r \leq r \leq (m+1) \Delta r; \varphi_{n-1} \leq \varphi \leq \varphi_n \right\}$$

mit $0 \leq m \leq M := 2^k - 1$ und $1 \leq n \leq N(m)$

$$\Delta r = 2^{-k} \quad \text{und} \quad \varphi_n = \sum_{\nu=1}^n \Delta \varphi_\nu^m \quad \text{mit} \quad \varphi_0 = 0.$$

Dabei sind die $\Delta \varphi_\nu^M > 0$ vorgegeben. Im regel-

(13) mäßigen Falle ist $\Delta \varphi_\nu^M = 2\pi/N(M)$, $1 \leq \nu \leq N(M)$.

Für $1 \leq m \leq M$ setzt man

$$\Delta \varphi_\nu^{m-1} = \begin{cases} \Delta \varphi_\nu^m & \text{falls } \exists k : 2^k \leq m < 2^{k+1} \\ \Delta \varphi_{2\nu-1}^m + \Delta \varphi_{2\nu}^m & \text{falls } \exists k \text{ mit } m = 2^k \end{cases}$$

Es wurde noch $N(m) = 2^{\mu(m)}$ mit $\mu(m) = \lfloor 2 \log m \rfloor + 3$ für $m > 0$ und $\mu(0) = 2$ gesetzt.

Die Diskretisierung hat die wichtige Eigenschaft:

$$(14) \quad \frac{1}{2} \min \{ \Delta \varphi_{\nu}^{i,i} \mid 1 \leq \nu \leq N(M) \} \leq r \Delta \varphi_n^m = \max \{ \Delta \varphi_{\nu}^{i,i} \mid 1 \leq \nu \leq N(M) \} \\ \text{für} \quad m \Delta r \leq r \leq (m+1) \Delta r.$$

Die Beziehung (14) besagt, daß die die Elemente begrenzenden Bögen nach innen nicht (im Verhältnis zu den äußeren Bögen) klein werden.

Wir können nun Finite-Element-Räume definieren:

$$(15) \quad S_1 := S^{2^{-1}} := \left\{ u \in C^0(\bar{B}) \mid u \text{ erfüllt (16) und (17)} \right\}$$

(16) Für $1 \leq n \leq 4$ ist $u|_{E_{0,n}}$ die in (r, φ) bilineare Interpolierende der 3 reellen Werte von u in den 'Ecken' $(0,0)$; (r, φ_{n-1}) ; (r, φ_n) .

(17) Für $m > 0$ und $1 \leq n \leq N(m)$ ist $u|_{E_{m,n}}$ die in (r, φ) bilinear Interpolierende der 4 reellen Werte von u in den 'Ecken' $(m\Delta r, \varphi_{n-1})$; $(m\Delta r, \varphi_n)$; $((m+1)\Delta r, \varphi_{n-1})$; $((m+1)\Delta r, \varphi_n)$.

BEMERKUNG

Man beachte, daß die Werte von $u \in S_1$ in den Punkten $(m\Delta r, \varphi_{2q-1})$ für $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq N(m)/2$ mit $m = 2^k$, $0 \leq k \leq l-1$, nicht unabhängig von den Werten in den anderen Diskretisierungspunkten festlegbar sind. Vielmehr folgt aus der Stetigkeit von u die Bedingung

$$(18) \quad u(m\Delta r, \varphi_{2q-1}) = (\Delta \varphi_{2q}^m u(m\Delta r, \varphi_{2q-2}) + \Delta \varphi_{2q-1}^m u(m\Delta r, \varphi_{2q})) / \Delta \varphi_q^{m-1}.$$

Dies liegt daran, daß $\Delta \varphi_q^{m-1} = \Delta \varphi_{2q-1}^m + \Delta \varphi_{2q}^m$ gilt und daher $u(m\Delta r, \varphi_{2q-1})$ gerade der linear interpolierte Wert zwischen $u(m\Delta r, \varphi_{2q-2})$ und $u(m\Delta r, \varphi_{2q})$ ist.

Wie man leicht induktiv nachrechnet, gilt bei festen Randwerten $u(1, \varphi_n)$

$$(19) \quad \dim S_1 = \frac{8}{3} (4^1 - 1) - 2^{1+2} + 5.$$

Weiter benötigen wir den Raum

$$(20) \quad S_1^0 := \{ u \in S_1 \mid u|_{\partial B} = 0 \}.$$

Transformieren wir nun B samt den Gitterlinien, die zu $\mathcal{L}_1$ gehören, mittels F^{-1} auf Ω , so erhalten wir die Diskretisierung $\hat{\mathcal{L}}_1$, die aus den Elementen

$$\hat{E}_{m,n} := F^{-1}(E_{m,n}) \text{ besteht.}$$

Bild 2 zeigt z.B. die Diskretisierung $\hat{\mathcal{L}}_2$.

$\hat{\mathcal{L}}_1$ enthält außer 4 Dreiecken T mit einer Spitze im Punkt $(0,0)$ isoparametrische Quadrilaterals Q , d.h. in unserem Falle Vierecke, die sich durch eine bilineare Transformation aus einem Quadrat gewinnen lassen. Eine Abbildung eines solchen Elements gibt das Bild 3a wieder.

Daneben tritt noch ein 'Übergangselement' $\tilde{Q}$ auf (siehe Abb. 3b). Dieses ergibt sich durch aneinandersetzen der Quadrilaterals $P_1P_2P_5P_6$ und $P_3P_4P_6P_5$ mit der gemeinsamen Seite $\overline{P_5P_6}$. Dabei ist der Punkt P_6 keine 'Freiheit' des Elements, da der Funktionswert dort sich als Interpolation der Werte bei P_1 und P_4 zwangsläufig ergibt (vgl. (18)), während der Funktionswert bei P_5 unabhängig von denen bei P_2 und P_3 ist. Solche Elemente, die hier gut behandelt werden können, werden in der Literatur meist nicht zugelassen. Sie sind hier notwendig, um kleine Winkel in der Mitte des Kreises zu vermeiden. Bezeichnen wir noch

$$S_1 := S^{2^{-1}} := \mathcal{F} S_1^0 \quad \text{mit } \mathcal{F} \text{ aus Satz 3.4, so ist}$$

$$(21) \quad S_1 \in C^0(\bar{\Omega}) \quad ,$$

und die Funktionen aus S_1 sind stückweise polynomial. Daraus folgt schon, daß $S_1 \in H^1(\Omega)$ ist (CIARLET(1978) Theorem 2.1.1). Da weiter die Randbedingungen von H_R^1 erfüllt sind, haben wir

$$(22) \quad S_1 \in H_R^1 \quad .$$

§ 3.5 Abschätzung des Interpolationsfehlers

Um die Voraussetzung (12) des Satzes 3.10 nachweisen zu können, müssen wir für eine Funktion $u \in H_R^2$ den Fehler der besten Approximation aus S_1 abschätzen. Da Funktionen aus H^2 aber schon stetig sind ($\dim=2$), ist es sinnvoll, mit Elementen aus S_1 zu interpolieren. Der optimale Approximationsfehler läßt sich dann durch den Interpolationsfehler abschätzen. Diesen kann man lokal, d.h. für jedes Element $E_{m,n}$, betrachten, da sich die Gesamtinterpolierende stückweise aus den lokal Interpolierenden zusammensetzt und sich auch die H^1 -Norm elementweise berechnen und aufsummieren läßt. Wir müssen also für jedes Element E von S_1 eine Abschätzung der Art

$$(23) \quad \|u - \pi_E u\|_{H^1(E)} \leq C h \|u\|_{H^2(E)}$$

finden. Dabei ist $\pi_E u$ die Interpolierende von u auf dem Element E , und es wurde für den Raum S_1 $h = 2^{-1}$ gesetzt. Die Konstante C in (23) ist unabhängig von h und u ; sie hängt nur von dem 'Typ' des Elementes E ab. Wir haben hier die drei Typen T , Q , $\tilde{Q}$, so daß C für alle drei Typen als gültig angenommen werden kann.

Nach JAMET(1976) gilt (23), wenn E ein Dreieck mit der größten Seite h ist, dessen größter Winkel unabhängig von h von π weg beschränkt werden kann. In unserem Falle (siehe Abb. 2) ist die größte Seite kleiner oder gleich $2^{-1} \sqrt{1 + 4\pi^2}$. Stecken wir den Faktor $\sqrt{1 + 4\pi^2}$ noch in die Konstante, so folgt (23) für die vier Dreiecke in $\hat{\mathcal{L}}_1$.

Als nächstes untersuchen wir die Quadrilaterals (vgl. dazu Abb. 3a).

Sei h_1 die kürzeste Seite von Q und h_2 die längste; weiter sei

$$\gamma_h := \max \left\{ |\cos \theta_i| \mid i = 1, \dots, 4 \right\}.$$

Dann gilt unter der Bedingung

$$(24) \quad \frac{h_1}{h_2} \sqrt{1 - \gamma_h} \geq \beta > 0 \quad \text{unabhängig von } h_1,$$

nach Example 7 in CIARLET & RAVIART(1972b) die Abschätzung (23) mit h_1 für h .

Wir haben daher (24) und $h_1 \leq C h$ zu zeigen.

Aus den Abbildungen 2 und 3a sieht man mit

$$\kappa = \sqrt{1 + 4\pi^2} \quad \text{die Beziehungen}$$

$$(25) \quad h \leq l_i \leq \kappa h \quad \text{für } i = 1, 2$$

und mit (14)

$$(26) \quad \frac{h}{C} \leq l_i \leq C h \quad \text{mit } C \geq \kappa \text{ und } i = 3, 4 ,$$

falls wir von der Diskretisierung mit einem $K > 0$ fordern:

$$(27) \quad \frac{1}{K} \max \{ \Delta \varphi_\nu^M \mid 1 \leq \nu \leq N(M) \} \leq h \leq K \min \{ \Delta \varphi_\nu^M \mid 1 \leq \nu \leq N(M) \} .$$

An Hand der Bilder 2 und 3a sieht man leicht die Winkelabschätzungen für die Vierecke

$$\begin{aligned} 0 \leq \cos \theta_i &\leq 2\pi/\kappa & i = 1, 3 \\ -2\pi/\kappa \leq \cos \theta_i &\leq 0 & i = 2, 4 \end{aligned}$$

und damit

$$\varphi_h \leq 2\pi/\kappa < 1 \quad \text{und}$$

$$\frac{h_1}{h_2} \sqrt{1 - \varphi_h} \geq \frac{1}{C^2} \sqrt{1 - 2\pi/\kappa} > 0 \quad \text{unabhängig von } h .$$

Damit gilt unter der Voraussetzung (27) die Abschätzung (23) ebenfalls für die Quadrilaterals Q .

CIARLET & RAVIART zeigen diese Fehlerabschätzungen für die Interpolation, indem sie Q als Bild des Standardquadrates Q^0 unter einer Transformation der Form

$$(28) \quad q(x,y) = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy$$

auffassen. Auf den zurückgeholten Interpolationsoperator π^0 wenden sie eine Art BRAMBLE-HILBERT-Lemma an. Für dieses Lemma muß π^0 nicht unbedingt ein Interpolationsoperator sein. Es wird nur gefordert, daß π^0 ein stetiger, linearer Operator von $H^2(Q^0)$ nach $H^1(Q^0)$ ist, der Polynome der Form (28) reproduziert (siehe Theorem 2 in CIARLET & RAVIART(1972b)). Daher läßt sich die gleiche Abschätzung für das 'Übergangselement' vom 'Typ $\tilde{Q}$ ' durchführen.

Dies sieht man folgendermaßen ein:

Das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ läßt sich mit dem gleichen Typ von Transformation wie beim Viereck Q auf das Quadrat Q^0 (siehe Abb. 3c) abbilden. Eine einfache geometrische Überlegung zeigt, daß dabei die Strecke $\overline{P_5P_6}$ parallel zu $\overline{P_1P_2}$ wird. Der von Q auf Q^0 zurückgeholte Interpolationsoperator π^0 interpoliert in den beiden Rechtecken $P_1P_2P_5P_6$ und $P_5P_3P_4P_6$ jeweils mit Polynomen der Form (28), jedoch unter der Einschränkung, daß bei P_6 nicht der Wert der gegebenen Funktion angenommen wird. Vielmehr wird zwischen den Funktionswerten bei P_1 und P_4 linear interpoliert. Dies ist notwendig, damit man einen stetigen Anschluß an das links benachbarte Element erreicht. Da π^0 stetig und linear von $H^2(Q^0)$ nach $H^1(Q^0)$ ist und weiterhin Polynome der Form (28) reproduziert wer-

den, gilt die Abschätzung (23) auch für die Übergangselemente vom Typ $\tilde{Q}$.

Wir haben damit folgenden Satz bewiesen:

3.11 SATZ

Für die Approximation von Funktionen aus H_R^2 mit den Räumen S^h mit $h = 2^{-1}$ gilt unter der Regularitätsvoraussetzung (27) an die Winkelinkremente $\Delta\varphi_v^M$ der Diskretisierung die Fehlerabschätzung

$$\forall u \in H_R^2 : \inf_{v \in S^h} \|u-v\|_{H_R^1} \leq C h \|u\|_{H_R^2}.$$

Damit erfüllen die Räume S^h die Voraussetzung (12) des Satzes 3.10.

Wir fassen das Ergebnis dieses Paragraphen als Satz zusammen.

3.12 SATZ

Für die mit den (im wesentlichen) stückweise bilinearen Finite-Elementen in Polarkoordinaten der Räume S^h aus (13) - (18) gewonnene Finite-Element-Approximation u_h^* zu der Lösung u^* des Dirichletproblems (5) bzw. (7) gelten unter der Regularitätsvoraussetzung (27) an die Diskretisierung die Fehlerabschätzungen

$$\|u^* - u_h^*\|_{H^1(B)} = O(h^{1/2-\varepsilon}) \quad \text{und}$$

$$\mathcal{J}(u_h^*) - \mathcal{J}(u^*) = O(h^{1-\varepsilon})$$

3.13 BEMERKUNGEN

(i) Da die verwendeten Finite-Elemente die gegebenen Randwerte und das zugrundeliegende Gebiet (den Einheitskreis) exakt wiedergeben und da weiter die Skalarprodukte (Integrale) beim Erstellen der Steifigkeitsmatrix explizit berechnet werden können (also ohne numerische Quadratur), treten außer dem 'Abbruchfehler' (theoretischer Approximationsfehler) keine weiteren Fehlerquellen auf, wenn man einmal von Rundungsfehlern absieht.

(ii) Die Rundungsfehler beim Lösen der linearen Gleichungssysteme der Finite-Element-Gleichungen sind im wesentlichen durch die Kondition der Steifigkeitsmatrix bestimmt. Nach dem Theorem 5.1 in STRANG & FIX (1973) ist die Konditionszahl in der Größenordnung $O(h_{\min}^{-2})$. Die Diskretisierung (13)-(18) ist nun gerade so angelegt, daß das minimale h in der gleichen Größenordnung wie das durchschnittliche h liegt (siehe (25)-(27)).

Damit ist die Konditionszahl größenordnungsmäßig 'optimal'.

§ 4 KONVERGENZ DES VERFAHRENS

§ 4.0 Übersicht

Wir betrachten die Approximation eines strikten lokalen Minimums x^* des Dirichletintegrals mit Hilfe des Verfahrens 2.4 .

Zunächst wird theoretisch eine Folge von Vergleichsfunktionen $\hat{x}_h$ konstruiert, indem die (unbekannte) Umparametrisierung $\frac{t}{\tau}$ mit $x^*|_{\partial B} = \varphi \circ \frac{t}{\tau}$ stückweise linear interpoliert wird. Unter einer Regularitätsannahme an $\frac{t}{\tau}$ kann dann die Konvergenz von $D(\hat{x}_h)$ gegen $D(x^*)$ gezeigt werden.

Unser Ziel ist, die tatsächlich mit dem Verfahren 2.4 berechnete Approximation im Funktional einzuschließen. Dazu muß man zunächst wissen, daß eine genügend gute polygonale Approximation der gegebenen Jordankurve eine Minimalfläche in der 'Nähe' von x^* berandet. Diese Aussage ist in dem Störungssatz des Abschnitts 4.3 enthalten. Damit gelingt es zu zeigen, daß die Dirichletintegrale der berechneten Näherungen gegen $D(x^*)$ konvergieren. Mit Kompaktheitsschlüssen von MORREY und Einbettungssätzen von KONDRASOV kann dann die Konvergenz der (ganzen) Folge in L_q , $1 \leq q < \infty$, gezeigt werden.

§ 4.1 Voraussetzungen

Für die Konvergenzuntersuchung müssen wir eine Reihe von Annahmen über die Art der polygonalen Approximation der gegebenen Jordankurve und die exakte Lösung machen.

Voraussetzung A

Die Randkurve Γ sei eine stückweise glatte Jordankurve, die in den Ecken noch Lipschitzstetig ist.

Unter 'glatt' sei dabei mindestens die Regularität C^2 zu verstehen.

Γ sei durch $\gamma: \partial B \rightarrow \Gamma$ nach dem $\frac{2\pi}{L}$ -fachen der Bogenlänge parametrisiert, wenn man ∂B mit $[0, 2\pi]$ identifiziert. L ist dabei die Bogenlänge von Γ .

Voraussetzung B1

Unter der Voraussetzung A an Γ und bei einer im folgenden festen 3-Punkte-Bedingung habe die zu approximierende Minimalfläche x^* die Randwerte $\gamma \circ \xi$ mit $\xi: \partial B \rightarrow \partial B$.

Wir nehmen an, daß ξ und ξ^{-1} strikt monoton sind und zur Klasse $H^1(\partial B, \partial B)$ gehören; dies ist z.B. der Fall, wenn beide stetig differenzierbar sind.

Voraussetzung B2

Über die Voraussetzung B1 hinaus gelte $\tau^* \in H^2(\partial B, \partial B)$.

BEMERKUNG

Nach einer persönlichen Mitteilung von J.C.C. NITSCHKE folgt vermutlich die Voraussetzung B1 aus der Voraussetzung A. Die Forderung B1 verlangt aber unter Umständen, daß Γ sogar stückweise analytisch ist.

Wir benötigen den Begriff eines strikten relativen Minimums.

4.1 DEFINITION

Γ sei eine rektifizierbare Jordankurve, und x_0 sei eine in Γ eingespannte Minimalfläche.

Dann heißt x_0 ein striktes relatives Minimum des Dirichletintegrals, falls in der C^0 -Norm auf $\bar{B}$ eine δ -Umgebung von x_0 existiert, so daß dort $D(x_0) < D(x)$ für alle zulässigen Funktionen $x \neq x_0$ gilt. Eine Funktion x heißt zulässig, wenn sie in $H^1(B) \cap C^0(\bar{B})$ liegt und ∂B monoton auf Γ abbildet.

Voraussetzung C

x^* sei ein striktes relatives Minimum des Dirichletintegrals zu der Randkurve Γ .

Im folgenden spielt der Begriff einer regulären Klasse von Diskretisierungen eine Rolle, den man bei asymptotischen Fehlerabschätzungen für die Interpolation benötigt.

4.2 DEFINITION

Eine Folge von Teilungen des Intervalls $[a, b)$

$a = t_1 < \dots < t_{M_n} < b$ mit $M_n \in \mathbb{N}$ für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine reguläre Klasse von Diskretisierungen des Intervalls $[a, b)$, falls eine von n unabhängige Konstante C existiert, so daß mit $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $1 \leq i \leq M_n$, $t_{M_n+1} = b$,

$\max \Delta t_i \leq C \min \Delta t_i$ gilt.

An die polygonale Approximation der gegebenen Kurve müssen wir bestimmte Voraussetzungen knüpfen.

Voraussetzung D

Die Kurve Γ genüge der Voraussetzung A und werde durch eine Folge von einbeschriebenen Polygonzügen

Γ_h mit den Ecken $\alpha_1, \dots, \alpha_{M_h}$, $M_h = g/h$ mit $g \in [\frac{1}{2}, 2]$

und h so, daß $g/h \in \mathbb{N}$, so approximiert, daß die

mittels $\mathcal{F}$ zurückgeholten Punkte $\beta_i := \mathcal{F}^{-1}(\alpha_i)$

eine reguläre Klasse von Diskretisierungen des Inter-

valls $[0, 2\pi)$ bilden. Ohne Einschränkung sei $\beta_1 = 0$.

Wenn Γ in den endlich vielen Punkten $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ nicht zweimal stetig differenzierbar ist, so sei weiter $M_h \ni m$ und die Punkte α_k mögen die Punkte Γ_i umfassen. Die zu Γ_h und β_i gehörende stückweise lineare Parametrisierung werde mit γ_h bezeichnet. Für alle h gelte:

$$\gamma_h(0) = \gamma_h(2\pi) = \gamma(0) ; \gamma_h(s_i) = \gamma(s_i) , i = 1, 2 ;$$

mit festen $0 < s_1 < s_2 < 2\pi$.

Wir benötigen ein Lemma, aus dem u.a. die Regularitätsbedingung (27) der Diskretisierung aus §3 folgt.

4.3 LEMMA

Es gelten die Voraussetzungen A, B1 (bzw. B2) und D.

Es sind $t_i := \xi^{-1}(\beta_i)$, und ξ_h ist die stückweise lineare Interpolation von ξ^{-1} mit den Daten (β_i, t_i) und $\xi_h(2\pi) = 2\pi$.

Behauptung:

(i) $\{t_i\}$ bildet eine reguläre Klasse von Diskretisierungen von $[0, 2\pi)$.

(ii) ξ_h ist invertierbar, und für $\hat{t}_h := \xi_h^{-1}$ gilt

(a) $\lim_{h \rightarrow \infty} |\hat{t} - \hat{t}_h|_{1,2} = 0 ;$

(b) $|\hat{t} - \hat{t}_h|_{1,2} \leq C h |\hat{t}|_{2,2} ,$ falls B2

erfüllt ist.

(iii) Weiter ist $\|\gamma - \gamma_h\|_{1,2} \leq C h$.

Beweis:

Mit $\xi := \tau^{-1}$ und $0 \leq t < t+h \leq 2\pi$ gilt

$$\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \dot{\xi} \leq \|\xi\|_{1,\infty}$$

und analog mit $h = t+h - t = \tau(\xi(t+h)) - \tau(\xi(t))$

gilt $h \leq (\xi(t+h) - \xi(t)) \|\tau\|_{1,\infty}$ und somit

$$\frac{1}{\|\tau\|_{1,\infty}} \leq \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} \leq \|\xi\|_{1,\infty},$$

woraus mit Voraussetzung D unmittelbar Teil (i) folgt.

zu (ii) Da ξ von ξ_h interpoliert wird, ist ξ_h monoton und daher invertierbar.

Da τ durch τ_h stückweise linear interpoliert wird, folgen die Aussagen (a) und (b) mit Teil (i) z.B. aus den Theoremen 3.4 und 3.5 in AUBIN(1972).

zu (iii) Da γ stückweise C^2 ist und die Ecken von Γ_h die 'Ecken' von Γ umfassen, zeigt man dies analog wie in (ii). □

§ 4.2 Vergleichsfunktionen

Zur Konvergenzuntersuchung konstruieren wir eine Folge von Vergleichsfunktionen. Man kann diese nicht berechnen, da dazu schon die unbekannte Randparametrisierung der gesuchten Minimalfläche bekannt sein müßte. Die Konvergenz der Folge läßt sich aber leicht untersuchen, und wir können damit die tatsächlich berechneten Näherungen 'einschließen'.

(1) Vergleichsfunktionen

Wir nehmen die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Lemma 4.3 an. Dann sei $\hat{x}_h$ die zu den Randwerten

$\hat{g}_h \circ \hat{t}_h$ gehörende in B harmonische Funktion.

Weiter sei $\hat{x}_h^*$ die zu denselben Randwerten gehörende Finite-Element-Approximation zu $\hat{x}_h$ (vgl. §3).

BEMERKUNG

Numerische Ergebnisse deuten darauf hin, daß zumindest für polygonalen Rand die numerische Lösung für die optimale Uparametrisierung in der Tat interpolierend ist und somit die numerische Rechnung die Näherungen $\hat{x}_h^*$ liefert.

Die Konvergenz dieser Folge von Vergleichsfunktionen ergibt sich aus den Lemmata 4.4 und 4.5 .

4.4 LEMMA

Es seien $x, y \in C^0(\bar{B}) \cap H^1(B)$ in B harmonisch mit den Randwerten $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$.

Dann ist:

$$(i) \quad \frac{1}{4\pi} |\bar{x}|_{1/2, 2, \partial B}^2 \leq D(x) \leq \frac{\pi}{16} |\bar{x}|_{1/2, 2, \partial B}^2 < \infty$$

$$(ii) \quad |\sqrt{D(x)} - \sqrt{D(y)}| \leq |\bar{x} - \bar{y}|_{1/2, 2, \partial B}$$

$$(iii) \quad |D(x) - D(y)| \leq (\sqrt{D(x)} + \sqrt{D(y)}) |\bar{x} - \bar{y}|_{1/2, 2, \partial B}$$

Beweis:

Wir schreiben $\bar{x}(t)$ für $\bar{x}(e^{it})$, $t \in I = [-\pi, \pi]$.

Da das Dirichletintegral mit dem Douglasintegral

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{16\pi} \int_{I \times I} \frac{(\bar{x}(s) - \bar{x}(t))^2}{\sin^2 \frac{s-t}{2}} ds dt \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_{I \times I} \frac{(\bar{x}(t+r) - \bar{x}(t))^2}{\sin^2 \frac{r}{2}} dt dr \end{aligned}$$

übereinstimmt (siehe §311 in NITSCHKE(1975)), gilt mit

$$\frac{2}{\pi} |r| \leq |\sin r| \leq |r| \quad \text{für } r \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

die Aussage (i). Dabei wurde die Seminorm

$$|\bar{x}|_{1/2, 2, \partial B}^2 = \int_{I \times I} \frac{(\bar{x}(t+r) - \bar{x}(t))^2}{|r|^{1+2 \cdot \frac{1}{2}}} dr dt \quad \text{benutzt.}$$

zu (ii) Für das quadratische Dirichletintegral gilt (siehe COURANT(1951) S.14)

$$\left| \sqrt{D(x)} - \sqrt{D(y)} \right| \leq \sqrt{D(x-y)} .$$

Mit Teil (i) folgen die Aussagen (ii) und (iii). $\square$

4.5 LEMMA

Es mögen die Voraussetzungen A, B1 (bzw. B2) und D gelten. In Voraussetzung D sei $M_h = 2^{1+2}$, und $\hat{x}_h^*$ liege in dem Finite-Element-Raum S_1 .

Dann gilt mit $h = 2^{-1}$:

$$(i) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \hat{x}^* - \hat{x}_h \right|_{1,2} = 0$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung B2 ist

$$\text{darüberhinaus} \quad \left| \hat{x}^* - \hat{x}_h \right|_{1,2} = O(h) .$$

Die Aussagen bleiben richtig, wenn man die

$|\cdot|_{1,2}$ -Seminorm durch die $|\cdot|_{0,\infty}$ -Norm ersetzt.

$$(ii) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| D(\hat{x}_h) - D(x^*) \right| = 0$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung B2 ist

$$\text{darüberhinaus} \quad \left| D(\hat{x}_h) - D(x^*) \right| = O(h) .$$

(iii) Die Aussage (ii) gilt auch für $\hat{x}_h^*$ statt $\hat{x}_h$,

wenn man $O(h)$ durch $O(h^{1-\epsilon})$ ersetzt.

4.6 BEMERKUNG

Aufgrund des Maximumprinzips konvergiert auch $\hat{x}_h$ gegen x^* (etwa in der Supremumsnorm) und wegen der H^1 -Abschätzung in Satz 3.12 konvergiert nach bekannten Einbettungssätzen auch $\hat{x}_h^*$ in L_q mit $q < \infty$ gegen x^* . Mit verfeinerten Techniken nach J.A. NITSCHÉ (siehe CIARLET(1978) Chap. 3 §3) ließe sich auch die L_∞ -Konvergenz von $\hat{x}_h^*$ gegen x^* zeigen. Da jedoch $\hat{x}_h^*$ nicht berechnet werden kann und sich diese Fehlerabschätzung nicht auf die berechneten Näherungen überträgt, wird hier darauf nicht näher eingegangen.

Beweis zu Lemma 4.5:

Wir kürzen in diesem Beweis $\hat{t}$ bzw. $\hat{t}_h$ mit τ bzw. τ_h ab.

Da $x^* - \hat{x}_h$ in B harmonisch mit den Randwerten $\mathcal{I} \circ \tau - \mathcal{I}_h \circ \tau_h$ ist, können wir Lemma 4.4 anwenden.

Da nach Voraussetzung A und B die Randwerte in $H^1(\partial B)$ liegen, können wir die Differenz der Dirichletintegrale abschätzen durch

$$(2) \quad |D(\hat{x}_h) - D(x^*)| \leq C (\sqrt{D(x^*)} + \sqrt{D(\hat{x}_h)}) |\mathcal{I} \circ \tau - \mathcal{I}_h \circ \tau_h|_{1,2}.$$

Dabei haben wir die $|\cdot|_{1/2,2}$ -Seminorm durch die $|\cdot|_{1,2}$ -Seminorm abgeschätzt (vgl. z.B. Lemma 5.4 in NECAS(1967)).

Mit Lemma 4.4(ii) erhält man

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & |D(\hat{x}_h) - D(x^*)| \leq \\
 & \leq C (\sqrt{D(x^*)} + |\dot{x} \circ \tau - \dot{x}_h \circ \tau_h|_{1,2}) \cdot |\dot{x} \circ \tau - \dot{x}_h \circ \tau_h|_{1,2} \\
 & \leq C |\dot{x} \circ \tau - \dot{x}_h \circ \tau_h|_{1,2} ,
 \end{aligned}$$

wobei C unabhängig von h gewählt werden kann, da

$|\dot{x}_h \circ \tau_h|_{1,2}$ gleichmäßig beschränkt ist.

Die Aussage (ii) folgt also aus Teil (i).

Für den ersten Teil spalten wir nach der Dreiecksungleichung auf:

$$(4) \quad |\dot{x} \circ \tau - \dot{x}_h \circ \tau_h|_{1,2} \leq |\dot{x} \circ \tau - \dot{x}_h \circ \tau_h|_{1,2} + |\dot{x}_h \circ \tau_h - \dot{x}_h \circ \tau_h|_{1,2} .$$

Wir schätzen zunächst den 2. Term ab:

$$\begin{aligned}
 |\dot{x}_h \circ \tau_h - \dot{x}_h \circ \tau_h|_{1,2} &= \|(\dot{x}_h(\tau_h) - \dot{x}_h(\tau_h)) \cdot \dot{\tau}_h\|_{0,2} \\
 &= \left[\int (\dot{x}_h(t) - \dot{x}_h(t))^2 \dot{\tau}_h^{-1}(t) dt \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \leq |\tau_h|_{1,\infty}^{1/2} |\dot{x} - \dot{x}_h|_{1,2}$$

Für den 1. Term erhalten wir

$$\begin{aligned}
 |\dot{x} \circ \tau - \dot{x}_h \circ \tau_h|_{1,2} &= \|\dot{x}(\tau) \dot{\tau} - \dot{x}(\tau_h) \dot{\tau}_h\|_{0,2} \\
 &\leq \|\dot{x}(\tau) (\dot{\tau} - \dot{\tau}_h)\|_{0,2} + \|\dot{x}(\tau) - \dot{x}(\tau_h)\|_{0,2} \|\dot{\tau}_h\|_{0,2}
 \end{aligned}$$

$$(6) \quad \leq |\mathcal{H}_{h,\infty}| |\tau - \tau_h|_{1,2} + |\tau_h|_{1,\infty}^{1/2} I^{1/2}$$

$$\text{mit } I = \int (\dot{x} \circ \tau \cdot \tau_h^{-1}(t) - \dot{x}(t))^2 dt .$$

Da $|\tau - \tau_h|_{1,2} = O(h)$ ist (vgl. Lemma 4.3),

bleibt noch zu zeigen:

- (a) $|\tau_h|_{1,\infty}$ ist gleichmäßig beschränkt.
- (b) $|\tau - \tau_h|_{1,2} \rightarrow 0$ und mit Voraussetzung B2
 $|\tau - \tau_h|_{1,2} = O(h)$.
- (c) $I^{1/2} = O(h)$
- (d) $\|\tau \circ \tau - \tau_h \circ \tau_h\|_{0,\infty} \leq C |\tau \circ \tau - \tau_h \circ \tau_h|_{1,2}$

zu (a) Da τ_h stückweise linear interpoliert, gilt

$$|\dot{\tau}_h(t)| = \left| \frac{\tau(s+h) - \tau(s)}{h} \right| = \frac{1}{h} \left| \int_s^{s+h} \dot{\tau} \right| \leq |\tau|_{1,\infty}$$

für $s \leq t \leq s+h$, wobei s und $s+h$ Interpolationspunkte sind.

(b) folgt direkt aus Lemma 4.3.

zu (c) Zunächst gilt mit $|\tau(x+h) - \tau(x)| \leq |\tau|_{1,\infty} h$

und $e := \tau - \tau_h : \|e\|_{0,\infty} \leq |\tau|_{1,\infty} \cdot h$.

Falls zusätzlich $\tau \in C^2(\partial B, \partial B)$ gelten würde, hätte man sogar $\|e\|_{0,\infty} \leq C \cdot h^2$ (CIARLET & RAVIART (1972a) Th. 2).

Wir erhalten

$$\varphi(t) := \tau \circ \tau_h^{-1}(t) = t + e \circ \tau_h^{-1}(t) \quad \text{und}$$

$$|\varphi(t) - t| \leq \|e\|_{0,\infty}.$$

Wir zerlegen nun den Integrationsbereich von I in

die Intervalle, in denen τ zweimal stetig differenzierbar ist.

$$I = \sum_{l=0}^m \int_{\beta_l}^{\beta_{l+1}} (\dot{\varphi} \circ \varphi - \dot{\varphi})^2 .$$

Dabei seien $\beta_0 = 0$, $\beta_{m+1} = 2\pi$ und β_l , $1 \leq l \leq m$, die möglichen Punkte, an denen φ nicht zweimal stetig differenzierbar ist. Aufgrund der Besonderheit der Approximation τ_h (vgl. Vor. D) umfassen die Funktionswerte der Interpolationspunkte von τ_h die Punkte β_l . Daher ist $\varphi(\beta_l) = \beta_l$, und $\dot{\varphi}$ ist in den Intervallen (β_l, β_{l+1}) stetig differenzierbar. Wir bezeichnen mit $\|\varphi\|_{2,\infty}$ das Supremum über die stückweise existierende zweite Ableitung von φ .

$$I \leq C \|\varphi\|_{2,\infty}^2 \|e\|_{0,\infty}^2 \quad \text{und daher}$$

$$(7) \quad I^{1/2} = O(h) .$$

Die Teilbehauptung (d) folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß $(\dot{\varphi} \circ \tau - \dot{\varphi} \circ \tau_h)(0) = 0$ ist.

Die Abschätzungen (4)-(6) ergeben den ersten Teil des Lemmas.

Die Behauptung (iii) ergibt sich mit Satz 3.12, da aufgrund von Lemma 4.3 die Regularitätsvoraussetzung (27) an die Diskretisierung in Satz 3.12 erfüllt ist.

Da in

$$|D(\hat{x}_h^*) - D(x^*)| \leq |D(\hat{x}_h) - D(x^*)| + |D(\hat{x}_h) - D(\hat{x}_h^*)|$$

der zweite Term von der Größenordnung $O(h^{1-\varepsilon})$ ist,

folgt Teil (iii) aus Teil (ii) .

□

§ 4.3 Ein Störungssatz

Um die Konvergenz unseres Verfahrens zu zeigen, untersuchen wir zunächst, was bei der Approximation der gegebenen Jordankurve mit Polygonzügen passiert. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Γ bzw. Γ_h mit den Parametrisierungen γ bzw. γ_h mögen die Voraussetzung D erfüllen. x^* mit $x^*|_{\partial B} = \gamma \circ \tau$ sei ein striktes relatives Minimum. Es sei

$$(8) \quad U_h^g(x^*) := \left\{ x_h \in C^0(\bar{B}, \mathbb{R}^3) \mid x_h \text{ ist in } B \right. \\ \left. \text{harmonisch mit den Randwerten } \gamma_h \circ \tau, \right. \\ \left. \text{wobei } \tau \text{ monoton und homöomorph ist} \right. \\ \left. \text{und die 3-Punkte-Bedingung erfüllt.} \right. \\ \left. \text{Es gelte} \right. \\ \left. \|\gamma_h \circ \tau - \gamma \circ \tau\|_{0,\infty} < \varepsilon \right\}$$

Analog sei $\bar{U}_h^g(x^*)$ dadurch definiert, daß ' $< \varepsilon$ ' durch ' $\leq \varepsilon$ ' ersetzt wird.

Wir benötigen, daß für alle $h \leq h_0$ mit einem geeigneten, kleinen h_0 das Dirichletintegral in $U_h^g(x^*)$ sein (dort absolutes) Minimum annimmt.

Zum Nachweis gehen wir ähnlich wie HILDEBRANDT(1966) vor, der dieses Ergebnis für eine C^2 -Störung des Randes formuliert hat, während sich zeigt, daß sich

sein Beweis auch auf polygonale Approximationen übertragen läßt. Wir erwähnen dazu eine Folgerung aus der strikten Minimalität von x^* .

4.7 LEMMA

(HILDEBRANDT(1966) Lemma 4.1)

Sei Γ eine rektifizierbare Jordankurve, und x^* sei ein striktes relatives Minimum des Dirichletintegrals (mit $\mathfrak{g}$ aus Definition 4.1).

Dann existiert für alle $0 < \mathfrak{g}' < \mathfrak{g}$ ein $\delta(\mathfrak{g}') > 0$ so, daß für alle zulässigen Flächen x mit

$$\|x - x^*\|_{0,\omega,\overline{B}} \leq \mathfrak{g} \quad \text{und} \quad \|x - x^*\|_{0,\omega,\partial B} \geq \mathfrak{g}'$$

$$D(x) \geq D(x^*) + \delta(\mathfrak{g}') \quad \text{gilt.}$$

Beschränkt man sich auf harmonische Flächen, so kann man die Supremumsnorm auf $\overline{B}$ durch diese auf ∂B ersetzen. Die Funktion $\delta(\mathfrak{g}')$ kann als schwach monoton angenommen werden.

HILDEBRANDT formulierte diese Lemma nur für $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/2$, sein Beweis ist jedoch von diesem speziellen Wert unabhängig.

Wir kommen nun zu dem benötigten Approximations- bzw. Störungssatz. Man vergleiche hierzu HILDEBRANDT(1966), Lemma 4.2.

4.8 SATZ

Es mögen die Voraussetzungen A, B1, C und D und die Bezeichnungen (8) gelten.

Behauptung:

(i) Für alle $h \leq h_0(\xi)$ mit passend kleinem h_0 ist $U_h^\xi(x^*)$ nicht leer; es enthält insbesondere das Element $\hat{x}_h$ aus (1) mit $D(\hat{x}_h) < \infty$.

(ii) Für alle $h \leq h_0(\xi)$ mit passend kleinem h_0 nimmt das Dirichletintegral in $U_h^\xi(x^*)$ sein (dort absolutes) Minimum in einer (nicht notwendig eindeutig bestimmten) harmonischen Fläche x_h^* an, die eine Minimalfläche darstellt.

(iii) $D(x_h^*) \xrightarrow{h \rightarrow 0} D(x^*)$

(iv) $\forall 0 < \xi' < \xi \exists h_0(\xi') > 0 \exists \delta'(\xi') > 0$, so daß

$\forall 0 < h \leq h_0(\xi') \quad \forall y_h \in \bar{U}_h^\xi(x^*)$ mit

$$\|y_h - x^*\|_{0,\infty,\partial B} \geq \xi'$$

(oder mit $y_h|_{\partial B} = \tau_h \cdot \tau_h$, $\tilde{\xi} > \xi'$ und h genügend klein und $\|\tau_h - \tilde{\tau}\|_{0,\infty} \geq \tilde{\xi}$)

$D(y_h) \geq D(x_h^*) + \delta'(\xi')$ gilt.

(v) Im Teil (iv) kann man die Bedingung

$$\|y_h - x^*\|_{0,\infty,\partial B} \geq \xi' \quad \text{bzw.} \quad \|\tau_h - \tilde{\tau}\|_{0,\infty} \geq \tilde{\xi}$$

durch $\|y_h - x_h^*\|_{0,\infty,\partial B} \geq \xi'$ bzw.

$$\|\tau_h - \tilde{\tau}_h\|_{0,\infty} \geq \tilde{\xi} \quad \text{ersetzen.}$$

BEMERKUNG: Die Behauptung (iv) bzw. (v) besagt nicht, daß das Minimum x_h^* lokal eindeutig ist, sondern nur, daß im Funktional ein 'Wall' um das Minimum (bzw. die Minima) bei leichter Störung der Randkurve bestehen bleibt.

Beweis:

Für genügend kleines h_0 und $h \leq h_0$ sieht man mit Lemma 4.5, daß $\hat{x}_h$ in $U_h^S(x^*)$ liegt. Lemma 4.4(i) besagt $M := D(\hat{x}_h) < \infty$. Damit ist Teil (i) gezeigt. Betrachten wir nun die Menge der Funktionen x aus $\bar{U}_h^S(x^*)$ mit $D(x) \leq M$, so bilden nach dem COURANT-LEBESGUE-Lemma (siehe COURANT(1951) Lemma 3.2) zunächst deren Randwerte und dann nach dem Maximumprinzip auch die Funktionen selbst eine kompakte Teilmenge in $C^0(\bar{B})$. Wir können daher aus einer Minimalfolge (bzgl. D) eine in $\bar{U}_h^S(x^*)$ konvergente Teilfolge auswählen. Die Grenzfunktion bezeichnen wir mit x_h^* . Aufgrund der Unterhalbstetigkeit des Dirichletintegrals (COURANT(1951) Lemma 1.1) wird in x_h^* das Minimum von D angenommen. Wenn x_h^* schon im Inneren, also in $U_h^S(x^*)$ liegt, folgt aus einem Variationsschluß von COURANT (siehe COURANT(1951) Remark 2, S. 116 und Chap. III §§3-4), daß x_h^* eine Minimalfläche darstellt. Dazu zeigen wir zunächst die Aussage (iii). Da $D(x_h^*) \leq D(\hat{x}_h)$ und nach Lemma 4.5 $D(\hat{x}_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} D(x^*)$ gilt, haben wir

$$(9) \quad \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} D(x_h^*) \leq D(x^*) .$$

Nun schließen wir weiter wie in NITSCHKE(1975) §327 .

Nach dem verallgemeinerten COURANT-LEBESGUE-Lemma

(NITSCHKE(1975) §235 und COURANT(1951) Remark 3 S. 104)

gibt es eine Teilfolge - die wieder mit (x_h^*) bezeichnet werde - und eine monotone Darstellung $f \cdot \tau$ von Γ mit $x_h^*|_{\partial B} \longrightarrow f \cdot \tau$ gleichmäßig in $[0, 2\pi]$.

Nach dem Maximumprinzip konvergiert dann (x_h^*) in $C^0(\bar{B})$ gegen ein $\hat{x}$. Die gleichmäßige Konvergenz zieht die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen im Inneren von B nach sich, und mit einer gleichmäßigen Abschätzung des Dirichletintegrals auf einem kleinen Randstreifen (NITSCHKE(1975) §326) konvergieren die Dirichletintegrale: $D(x_h^*) \longrightarrow D(\hat{x})$.

Die Beziehung (9) impliziert $D(\hat{x}) = D(x^*)$, und da x^* ein striktes Minimum ist, gilt $\hat{x} = x^*$.

Daraus folgt aber schon die Konvergenz der ganzen Folge (x_h^*) und nicht nur der oben ausgewählten Teilfolge. Damit ist der Teil (iii) gezeigt.

Die Konvergenz $D(x_h^*) \longrightarrow D(x^*)$ steht im Widerspruch zur Aussage (iv), wenn nicht x_h^* schon im Inneren $U_h^0(x^*)$ liegt und daher eine Minimalfläche darstellt.

Zum Beweis der Aussage (iv) gehen wir wie HILDEBRANDT (1966) in Lemma 4.2 vor. Wir schließen indirekt.

Wir nehmen an, es existiere eine Folge $(y_h) \subset \bar{U}_h^S(x^*)$

mit $y_h|_{\partial B} = \tau_h$ und

$$\|\tau_h - \tau^*\|_{0,\infty} \geq \varepsilon' \quad \text{aber dennoch} \quad (10)$$

$$|D(y_h) - D(x_h^*)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Mit Teil (iii) haben wir dann

$$(11) \quad D(y_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} D(x^*) .$$

Nach dem (verallgemeinerten) COURANT-LEBESGUE-Lemma gibt es eine in $C^0(\bar{B})$ konvergente Teilfolge $(\hat{y}_h)$, die gegen ein $\hat{y}$ konvergiert. Die Annahme (10) impliziert $\|\hat{y}|_{\partial B} - \tau^*\|_{0,\infty} \geq \varepsilon'$, während nach (11) $D(\hat{y}) \leq D(x^*)$ gilt. Das ist aber ein Widerspruch zu Lemma 4.7 .

Somit folgt die Aussage (iv) und analog (v), da, wie weiter oben gezeigt, die Randwerte von x_h^* gegen τ^* konvergieren.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

§ 4.4 Konvergenzsatz

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Konvergenz von endlich-dimensionalen Näherungslösungen, wie sie mit dem Verfahren 2.4 berechnet werden können.

Wir setzen dabei voraus, daß die zu approximierende Minimalfläche ein striktes relatives Minimum des Dirichletintegrals ist. Das ist einerseits eine starke Voraussetzung, da dies i.a. nur für die absoluten Minima bei einer analytischen Randkurve (ohne Ecken) bekannt ist (TOMI(1973)).

Andererseits ist diese Voraussetzung für numerische Zwecke äußerst schwach. Dies wird schon an einem einfachen eindimensionalen Beispiel deutlich.

Es sei $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine strikt monotone Funktion mit $g(0) = 0$. Damit definiert man $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mittels $f(x) := g(|x|) \left(1 + c(1 + \sin \frac{1}{|x|}) \right)$ mit $c > 0$. Diese Funktion hat bei 0 ein striktes relatives Minimum und dennoch in jeder Umgebung von 0 beliebig viele weitere lokale Minima.

Da unter den gegebenen Voraussetzungen ein ähnlich 'boshafes' Verhalten des approximierenden Variationsproblems nicht ausgeschlossen werden kann, wird man einen Konvergenzbeweis für die endlich-dimensionale Minimierung nicht erwarten können. Der Nachweis der Konvergenz ist für die meisten numerischen Verfahren zur Minimierung, wenn überhaupt, nur unter sehr

restriktiven Annahmen bzgl. der zu minimierenden Funktion möglich.

Wir nehmen daher an, daß die endlich-dimensionale Minimierung (bei einem iterativen Verfahren nach endlich vielen Schritten) eine Näherung $\bar{x}_h$ liefert, deren zugehörige Harmonische in $U_h^g(x^*)$ liegt, und für die $D(\bar{x}_h) \leq D(\hat{x}_h^*) + e_h$, $e_h = O(h)$ gilt. Da die Vergleichsfunktion $\hat{x}_h^*$ aus (1) zur Menge der konkurrierenden Elemente bei dem endlich-dimensionalen Minimierungsprozeß gehört, ist diese Annahme erfüllbar. Der Term e_h berücksichtigt nur Rundungs- und Abbruchfehler der endlich-dimensionalen Iteration, nicht jedoch irgendeinen Diskretisierungsfehler. In dem nicht ausschließbaren 'boshaften' Falle wird man ein (in $U_h^g(x^*)$) lokales absolutes Minimum des approximativen Funktional d_h aus dem Verfahren 2.4 bis auf einen Fehler e_h näherungsweise berechnen müssen. Da das absolute Minimum x_h^* (bzw. die absoluten Minima) nach dem Störungssatz 4.8 einen 'Wall' um sich behalten, verläuft die iterative Minimierung in $U_h^g(x^*)$, wenn man dafür sorgt, daß das Dirichletintegral auch auf der Verbindungslinie zweier Iterierten nicht ansteigt.

Es bleibt zu bemerken, daß bei allen numerischen Beispielen nie ein 'boshaftes' Verhalten beobachtet wurde. Vielmehr scheint das approximative Funktional lokal konvex zu sein.

4.9 SATZ

Es mögen die Voraussetzungen A, B1, C, D und die Bezeichnungen aus Lemma 4.5 und Satz 4.8 gelten. In Voraussetzung D sei $M_h = 2^{1+2}$, und $\hat{x}_h^*$ liege in dem Finite-Element-Raum S_1 . Der Diskretisierungsparameter $h = 2^{-1}$ sei so klein ($h \leq h_0$), daß die Voraussetzungen von Satz 4.8 erfüllt sind.

Behauptung:

Wenn für jedes $h \leq h_0$ die endlich-dimensionale Minimierung ein $\bar{x}_h$, dessen zugehörige Harmonische in $U_h^g(x^*)$ liegt, mit $D(\bar{x}_h) \leq D(\hat{x}_h^*) + e_h$ und $e_h = O(h)$ liefert, dann gilt:

$$(a) \quad D(\bar{x}_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} D(x^*)$$

$$(b) \quad \bar{x}_h \xrightarrow{L_q} x^* \quad \text{für alle } 1 \leq q < \infty.$$

Beweis:

Wir schließen die berechneten Näherungen $\bar{x}_h$ im Funktional ein. Da die zugehörige Harmonische $\tilde{x}_h$ in $U_h^g(x^*)$ liegt, kann man $D(\bar{x}_h)$ nach dem Dirichlet'schen Prinzip durch das absolute Minimum $D(x_h^*)$ in $U_h^g(x^*)$ nach unten abschätzen. Andererseits gilt nach Voraussetzung

$$D(\bar{x}_h) \leq D(\hat{x}_h^*) + e_h \quad \text{mit} \quad e_h = O(h).$$

Damit haben wir die Einschließung

$$D(x_h^*) \leq D(\bar{x}_h) \leq D(\hat{x}_h^*) + e_h .$$

Die Konvergenz $D(x_h^*) \longrightarrow D(x^*)$ liefert der Störungssatz 4.8 . Die Folge der Vergleichsfunktionen $(\hat{x}_h^*)$ konvergiert nach Lemma 4.5, in das die Fehlerabschätzung für die Finite-Element-Approximation aus §3 einging.

Damit ist die Teilbehauptung a) gezeigt.

Den Teil b) erhält man nun mit einem Kompaktschluß.

Die Folge $(\bar{x}_h)$ liegt in $H^1(B)$, ihre Randwerte (in $L_2(\partial B)$) und $D(\bar{x}_h)$ sind beschränkt.

Die Lemmata 9.4.14, 9.4.16 und 9.4.15 in MORREY(1966) zeigen die Beschränktheit von $\|\bar{x}_h\|_{0,2,B}$, die Existenz einer in $H^1(B)$ schwach konvergenten Teilfolge $\bar{x}_h' \longrightarrow \bar{x}^*$ und

$$D(\bar{x}^*) \leq \liminf D(\bar{x}_h') , \quad \|\bar{x}_h' - \bar{x}^*\|_{0,2,\partial B} \longrightarrow 0 .$$

Durch eventuelles Übergehen zu einer weiteren Teilfolge (mit gleicher Bezeichnung) erreicht man die punktweise Konvergenz der Randwerte. Wegen $\bar{x}_h' \in U_h^S(x^*)$ gilt daher auch $\|\bar{x}^* - x^*\|_{0,\infty,\partial B} \leq \delta$.

Da x^* ein striktes relatives Minimum ist, zeigt

$$D(\bar{x}^*) \leq \liminf D(\bar{x}_h^i) = \lim D(\bar{x}_h) = D(x^*) ,$$

daß $\bar{x}^*$ schon mit x^* übereinstimmen muß.

Da dies für jede Teilfolge gilt, konvergiert die ganze Folge schwach in $H^1(B)$.

Wir erhalten dann die Aussage b) mit den Sätzen von KONDRASOV (NECAS(1967), Conséquence II.6.2) . $\square$

4.10 KOROLLAR

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.9 und B2 gilt für polygonalen Rand Γ

$$|D(\bar{x}_h) - D(x^*)| = O(h^{1-\varepsilon}) .$$

Beweis

Da Γ polygonal ist, gilt $\hat{x}_h = x^*$.

Mit Lemma 4.5 folgt dann die Behauptung. $\square$

4.11 BEMERKUNGEN

(i) Da der Flächeninhalt A kleiner gleich und für Minimalflächen gleich dem Dirichletintegral ist, gilt

$$D(x^*) \longleftarrow D(x_h^*) = A(x_h^*) \leq A(\bar{x}_h) \leq D(\bar{x}_h) \longrightarrow D(x^*) .$$

Daher konvergiert auch der Flächeninhalt der Approximationen gegen den Flächeninhalt der Minimalfläche.

Bei den numerischen Beispielen ist die Differenz der Flächeninhalte kleiner als die der Dirichletintegrale, und sie scheint auch etwas schneller zu konvergieren.

(ii) Das Verfahren 2.4 berechnet die Finite-Element-Approximation, die in einer gewissen Klasse lokal ein minimales Dirichletintegral hat. Da jedoch das Dirichletintegral wegen der freien Umparametrisierung am Rande nicht zu einer Norm äquivalent ist, und Aussagen über die Konvergenzgüte der Umparametrisierung nicht zur Verfügung stehen, konnte die Konvergenz im letzten Satz nur mit Hilfe von Kompaktheitsschlüssen gezeigt werden. Direkte Abschätzungen des Fehlers (z.B. in einer L_p -Norm) scheinen beim parametrischen Problem schwierig zu sein.

Im Falle der nichtparametrischen Minimalflächen hat PARKS(1977) Abschätzungen des Fehlers in der L_1 - und L_∞ -Norm durch die Differenz der Flächeninhalte gezeigt. Mit seinen Methoden könnte man auch hier im Falle der nichtparametrischen Flächen sowohl den Diskretisierungsfehler im Inneren als auch den Fehler, der durch die polygonale Approximation des Randes entsteht, abschätzen, falls es gelänge zu zeigen, daß die in dieser Arbeit konstruierte Folge von Näherungen gleichmäßig Lipschitzbeschränkt ist.

PARKS(1977) erreicht dies bei seinen Näherungen, indem er $\hat{a}$ priori nur solche Approximationen zuläßt, deren Lipschitzschranke die der Minimalfläche höchstens um einen festen Faktor überschreitet. Er zeigt dann, daß es in diesen Klassen Elemente gibt, die bzgl. des Flächeninhaltes genügend nahe an den Inhalt der Minimalfläche herankommen. Ein solches Vorgehen wäre theoretisch bei unserem Verfahren auch möglich (z.B. die Vergleichsfunktionen $\hat{x}_h^*$ würden auch die obigen Bedingungen erfüllen), jedoch ähnlich wie das Verfahren von PARKS wäre es in der Praxis kaum durchführbar, wenn nicht die Folge von Approximationen 'von selbst' gleichmäßig Lipschitzbeschränkt ist.

(iii) Für die Konvergenzuntersuchung wurde stets auf die Vergleichsfunktionen $\hat{x}_h$ bzw. $\hat{x}_h^*$ aus (1) zurückgegriffen. Dies liegt insbesondere daran, daß wir zeigen konnten, daß zu $\hat{x}_h^*$ eine reguläre Diskretisierung gehört. Obwohl dies für die numerisch gefundene Approximation $\bar{x}_h$ nicht bewiesen werden konnte, zeigt die folgende heuristische Überlegung, daß sich von selbst ein 'gute' Diskretisierung einstellt.

Bezeichnen wir mit $x(\tau)$ die harmonische Funktion mit den Randwerten $f \cdot \tau$ und mit $x_h(\tau)$ die zugehörige Finite-Element-Approximation, so läßt sich $x_h(\tau)$ in $x(\tau) + e(\tau)$ zerlegen.

Aufgrund einer Eigenschaft der RITZ-GALERKIN-Projektion gilt

$$D(x_h(\tau)) = D(x(\tau)) + D(e(\tau)) \quad .$$

Da nun die Summe $D(x(\tau)) + D(e(\tau))$ minimiert wird, wird das Verfahren $e(\tau)$ in der H^1 -Norm (welche zu $D(\cdot)$ äquivalent ist, da $e(\tau)$ Nullrandwerte hat) möglichst klein machen - auch etwas auf Kosten des Terms $D(x(\tau))$.

Da aber weder für den Ausdruck $D(x(\tau)) - D(x(\tau'))$ noch für $D(e(\tau)) - D(e(\tau'))$ Abschätzungen nach unten durch irgendeine Norm von $\tau - \tau'$ bekannt sind, läßt sich die obige heuristische Überlegung nicht in der Weise quantifizieren, daß man die Regularität der zu $\bar{x}_h$ gehörenden Diskretisierung zeigen könnte.

Es ist jedoch bekannt, daß für Jede Folge von Umparametrisierungen (τ_h^n) (h fest), die gegen eine nur schwach monotone Umparametrisierung konvergiert, die Folge $D(x(\tau_h^n))$ und damit nach dem Dirichlet'schen Prinzip erst recht die Folge $D(x_h(\tau_h^n))$ gegen Unendlich strebt (siehe COURANT(1951) S. 227).

Es bleibt abschließend zu bemerken, daß diese asymptotischen Überlegungen ($h \rightarrow 0$) für die Praxis keine allzu überragende Bedeutung haben.

§ 5 DIE BEHANDLUNG DER ENDLICH-DIMENSIONALEN PROBLEME

§ 5.0 Übersicht

Für die Praktikabilität des vorgeschlagenen Verfahrens, das auf den ersten Blick sehr aufwendig erscheint, ist es sehr wichtig, daß die dabei auftretenden Hilfsprobleme sehr effizient gelöst werden können. Dies trifft ganz besonders auf die Lösung der linearen Gleichungssysteme bei der Finite-Element-Approximation zu. Die auftretenden Matrizen sind zwar dünn besetzt, aber bei der in §3 angegebenen Diskretisierung scheint eine geeignete Abzählung der Unbekannten schwierig zu sein. Das ist aber für die schnellsten direkten Verfahren wichtig (siehe z.B. GEORGE(1973), GEORGE & MCINTYRE (1978) und GEORGE & LIU(1978)).

Da viele Gleichungssysteme mit zum Teil sehr ähnlichen Lösungen (aber verschiedenen Matrizen) gelöst werden müssen, bieten sich iterative Verfahren an.

Für lineare Gleichungssysteme, die aus Diskretisierungen von elliptischen Differentialgleichungen stammen, sind in jüngster Zeit sehr schnelle iterative Verfahren gefunden worden, die den direkten überlegen sind.

Diese sogenannten 'Mehrgitter-Methoden' werden u.a. in den Arbeiten von BANK & DUPONT(1977), BRANDT(1977), HACKBUSCH(1977) und NICOLAIDES(1977) untersucht.

Wir geben einen Mehrgitter(MG)-Algorithmus hier an und zeigen, daß bei der Diskretisierung aus §3 der rechenzeitmäßig aufwendigste Teil des MG-Algorithmus (die Erstellung der 'komprimierten' Matrizen) nicht gebraucht wird.

Dies fällt insbesondere deswegen ins Gewicht, da der MG-Algorithmus mit der nichtlinearen Minimierung bezüglich der Randparametrisierung zu einem 'Diagonalalgorithmus' verquickt wird.

Damit ist gemeint, daß die zu lösenden linearen Gleichungssysteme keineswegs bis auf die Rundungsgenauigkeit des Rechners 'ausiteriert' werden, sondern daß nach einer festen Anzahl von Iterationen des MG-Algorithmus (in der Regel ein bis zwei) der nächste Schritt der nichtlinearen Minimierung ausgeführt wird. Zum Schluß wird noch auf die (heuristische) Wahl der Startwerte, auf die zum Teil erhebliche Ersparnis an Rechenaufwand durch Ausnutzung von Symmetrien und auf die Zahl der benötigten Rechenoperationen eingegangen.

§ 5.1 Ein Mehrgitter-Algorithmus

Wir wollen im folgenden den MG-Algorithmus kurz erläutern, um die Vereinfachung beim Übergang auf die komprimierten Matrizen aufzeigen zu können. Wir lehnen uns dabei in der Sprechweise an AUBIN(1972) Chap. 1 §2 und HACKBUSCH(1977) an.

Gegeben seien die Hilberträume V und W mit $V \hookrightarrow W$ und V dicht in W . W werde mit seinem Dualraum identifiziert. Auf V betrachten wir eine stetige, symmetrische und koerzitive Bilinearform $a(.,.)$ und damit das Variationsproblem:

(P) Suche $u \in V$ so, daß für alle $v \in V$
 $a(u,v) = \langle f, v \rangle$ gilt.

Dabei ist f ein festes Element aus V' und $\langle ., . \rangle$ die duale Paarung zwischen V und V' .

Zur näherungsweisen Lösung des Problems P benutzen wir von einem positiv reellen Parameter h abhängige endlich-dimensionale Hilberträume V_h mit den zugehörigen 'Prolongationen' p_h und analog (V_H, p_H) mit $H > h$.

$$\begin{aligned}
 & V_H \hookrightarrow V_h \hookrightarrow V \hookrightarrow W \\
 (1) \quad & p_h : V_h \longrightarrow V, \quad p_H : V_H \longrightarrow V \\
 & \pi : V_H \longrightarrow V_h, \quad p_H = p_h \circ \pi.
 \end{aligned}$$

Wir erhalten die approximativen Variationsprobleme

$$(P_h) \text{ Suche } u_h \in V_h \text{ so, da\ss f\"ur alle } v_h \in V_h \\ a_h(u_h, v_h) := a(p_h u_h, p_h v_h) = \langle f, p_h v_h \rangle \\ \text{gilt.}$$

Analog erh\"alt man das Problem P_H .

Nach LAX-MILGRAM existiert ein linearer, stetiger

Operator $A : V \longrightarrow V'$ mit

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \text{ f\"ur alle } u, v \in V.$$

Bezeichnen wir mit $(\cdot, \cdot)_h$ das Skalarprodukt in V_h ,
so erhalten wir

$$(2) \quad a_h(u_h, v_h) = (A_h u_h, v_h)_h = (u_h, A_h v_h)_h \\ A_h = p_h^T A p_h \text{ mit } p_h^T : V' \longrightarrow V'_h \cong V_h.$$

Der analog gebildete Operator A_H h\"angt mit A_h \u00fcber

$$(3) \quad A_H = \pi^T A_h \pi \quad \text{zusammen.}$$

W\"ahlen wir in den R\"aumen V_h eine feste Basis e_k ,
 $1 \leq k \leq n(h)$, und setzen $\lambda_k := p_h(e_k)$, so erhalten
wir eine Matrixdarstellung von A_h , die ebenfalls mit
 A_h bezeichnet werde.

$$(4) \quad (A_h)_{ij} = a(\lambda_i, \lambda_j) \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n(h).$$

Wir benutzen im folgenden die gleiche Bezeichnung für ein Element aus V_h und dessen Komponentenvektor bzgl. der Basis $\{e_k\}$. Mit $(F_h)_k := \langle f, \lambda_k \rangle$ wird das Problem (P_h) zu einem linearen Gleichungssystem äquivalent.

$$(P_h) \text{ Suche } u_h \text{ mit } A_h u_h = F_h.$$

Faßt man V_h als Finite-Element-Raum auf, so sind die Matrizen A_h die 'Steifigkeitsmatrizen' zum Problem P (bzw. P_h). Man vergleiche dazu §2 (10).

Wir denken uns die Räume V_h aus einer Diskretisierung mit einem Gitter der Maschenweite h entstanden. Die Mehrgitter-Methode benutzt nicht nur ein festes Gitter, sondern auch gröbere Gitter. Wir betrachten zunächst die einstufige Variante, die nur zwei Gitter mit den Maschenweiten h und H benutzt.

Zu einer gegebenen Näherung u_h^0 berechnet man zunächst den Defekt

$$(5) \quad d_h := A_h u_h^0 - F_h.$$

Dieser hängt mit dem Fehler $\delta_h := u_h^0 - u_h$ mittels

$$(6) \quad A_h \delta_h = d_h \quad \text{zusammen.}$$

Nun ermittelt man nicht die Korrektur δ_h direkt aus (6) - dies wäre zu rechenaufwendig -, sondern man nähert δ_h auf dem gröberen Gitter. Dazu 'verdichtet' man die Gleichung (6) zu

$$(7) \quad \underbrace{\pi^T}_{A_H} A_h \pi \tilde{\delta}_h = \pi^T d_h .$$

Mittels π 'prolongiert' man nun $\tilde{\delta}_h$ zu einer Korrektur auf dem feineren Gitter. Damit findet man als Zwischennäherung

$$(8) \quad \hat{u}_h^o := u_h^o - \pi \tilde{\delta}_h .$$

Während durch (8) die 'niederfrequenten' Bestandteile des Fehlers gut korrigiert werden, bleiben die 'hochfrequenten' Teile voll erhalten, da sie ja auf dem gröberen Gitter nicht erfaßt und somit nicht korrigiert werden können.

Daher 'glättet' man $\hat{u}_h^o$ aus (8) mit einem 'Glättungsoperator' $\mathcal{J}$.

$$(9) \quad u_h^1 := \mathcal{J} \hat{u}_h^o$$

Geeignete Glättungsoperatoren, welche die hochfrequenten Bestandteile des Fehlers stark ausdämpfen, stellen die Relaxationsverfahren dar.

Man kann Gesamtschritt-, Einzelschritt- oder diverse Block-Relaxationen benutzen.

In der Anwendung auf die Gleichungssysteme aus §2 hat sich folgende Blockrelaxation als günstig erwiesen:

Wie aus den Abbildungen 4-7 hervorgeht, liegen die Unbekannten (Eckpunkte der Finite-Elemente) auf konzentrischen Kreisen. Wir betrachten nun einen Kreis (einschließlich des Sonderfalles des Mittelpunktes) als einen Block, d.h. wir lösen das Gleichungssystem (P_h) , indem wir die Punkte dieses Kreises als unbekannt und die Punkte der innerhalb und außerhalb liegenden Nachbarkreise als bekannt betrachten. Es ergibt sich dabei fast eine tridiagonale Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} ++ & & & & + \\ +++ & & & & \\ +++ & & & & \\ +++ & & & & \\ +++ & & & & \\ +++ & & & & \\ +++ & & & & \\ +++ & & & & \\ +++ & & & & \\ +++ & & & & \\ +++ & & & & \\ +++ & & & & \\ + & & & & ++ \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige Gleichungssystem läßt sich schnell lösen, der Aufwand wächst nur linear mit der Anzahl der Unbekannten auf einem Kreis.

In dieser Weise beginnen wir mit dem äußersten Kreis (direkter Nachbar des Randes) und fahren bis zur Mitte fort, um dann in umgekehrter Reihenfolge wieder bis

zum Rand zu gehen. Diese Glättung hat sich vor allem bei sehr unregelmäßigen Winkelinkrementen gut bewährt.

Die allgemeine MG-Iteration unterscheidet sich von der einstufigen Variante dadurch, daß man die immer noch zu rechenaufwendige Gleichung (7), die von der gleichen Form wie P'_h (nur auf dem gröberen Gitter) ist, durch eine rekursive Anwendung des einstufigen Verfahrens so weit auf immer gröbere Gitter zurückführt, bis dieses letzte Gleichungssystem mit ganz wenigen Unbekannten und kleinem Rechenaufwand direkt gelöst werden kann.

In unserem Falle benutzen wir die in §3 eingeführten Räume S_1 . Dem feinsten Gitter entspreche S_L , welches von den (äußeren) Winkelinkrementen $\Delta\varphi_\nu^{M(L)}$, $1 \leq \nu \leq 4 \cdot 2^L$ (vgl. §3 (13)) abhängt. Beim Übergang zum nächst gröberen Gitter S_{L-1} wählen wir die Winkelinkremente folgendermaßen:

$$(10) \quad \Delta\varphi_\nu^{M(L-1)} := \Delta\varphi_{2\nu-1}^{M(L)} + \Delta\varphi_{2\nu}^{M(L)}.$$

Mit dieser Wahl gilt:

$$(11) \quad S_{L-1} \subset S_L \quad \text{und}$$

$$(12) \quad S_L|_{B_{1/2}} = \chi(S_{L-1}).$$

In (12) bedeuten

$$S_L|_{B_{1/2}} := \{ u \mid \exists v \in S_L : u = v|_{B_{1/2}} \} \quad \text{und}$$

$$\chi_{(S_{L-1})} := \{ u \mid u \circ \chi \in S_{L-1} \} \quad ,$$

$$\chi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \chi(x) := 2x \quad .$$

Die Abbildungen $\pi_l: S_{l-1} \longrightarrow S_l$, $2 \leq l \leq L$, die in (3), (7) und (8) gebraucht werden, ergeben sich als stückweise lineare Interpolation, da sich jedes Finite-Element aus S_{l-1} gerade als Vereinigung von 4 (bzw. 3) Elementen aus S_l schreiben läßt.

π_l^T ergibt sich durch Transposition der zugehörigen Matrixdarstellung.

Wegen der Invarianz des Dirichletintegrals gegenüber Streckungen ist

$$(13) \quad \int_B |\nabla u|^2 = \int_{B_{1/2}} |\nabla(u \circ \chi)|^2 \quad .$$

Damit ergibt sich aufgrund von (12) folgender Zugang zu den verdichteten Matrizen A_H :

Numeriert man die Unbekannten von innen nach außen

- siehe Abbildung 8 -, so ist die verdichtete Matrix

A_{L-1} in der linken oberen Ecke der Matrix A_L enthalten.

$$A_L = \begin{pmatrix} A_{L-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Dies folgt daraus, daß aufgrund von (12) und (13) die entsprechenden Elemente in (4) für A_h und A_H übereinstimmen.

Auch wenn man berücksichtigt, daß programmtechnisch die Matrix A_L (bzw. A_{L-1}) nicht voll gespeichert wird - es werden zu jedem Punkt nur die maximal 7 Wechselwirkungsterme mit seinen Nachbarn und sich selbst gespeichert -, stehen mit A_L sofort ohne jeden Rechen- oder Verwaltungsaufwand alle verdichteten Matrizen bis zur größten Stufe zur Verfügung. Die größte Stufe enthält noch 5 Unbekannte (Abb. 4). Um die Ersparnis an Rechenaufwand zu beurteilen, beachte man, daß die Berechnung der verdichteten Matrizen sonst sehr aufwendig ist. Dieser Prozeß benötigt nach Gleichung (2) so viele Rechenoperationen wie mehrere MG-Iterationen (HACKBUSCH spricht von etwa 4 Iterationen).

Ebenso ist die andere Alternative über Gleichung (4) mindestens so aufwendig, da dazu viele L_2 -Skalarprodukte berechnet werden müssen.

Wir wollen nun noch auf mögliche Verallgemeinerungen der 'h-Folge' eingehen. In §3 haben wir uns auf den Fall $h = 2^{-1}$, $1 \in \mathbb{N}$ beschränkt. Für den MG-Algorithmus ist der Faktor 2 zwischen zwei h-Werten nicht

unbedingt notwendig. Wenn man jedoch die Beziehungen (11) und (12) erhalten will, muß man sich auf Folgen der Form $1/h = q \cdot 2^{-l+1}$ mit einer kleinen natürlichen Zahl q beschränken. Die Diskretisierung in diesem Falle ist völlig analog, jedoch enthält das gröbste Gitter im MG-Algorithmus für $q > 2$ mehr Unbekannte. Deswegen wird man sich auf $q = 2$ oder $q = 3$ in praktischen Fällen beschränken.

§ 5.2 Behandlung des nichtlinearen Problems

Wir greifen auf die Bezeichnungen aus §2 zurück.
Im Verfahren 2.4 bzw. 2.4' wird ein Minimum bzw.
allgemeiner ein stationärer Punkt der Funktion $d_h(.)$
aus §2 (18) approximiert. $d_h(.)$ wurde auf der Menge
 $\uparrow$ aus §2 (19) definiert. Hier benutzen wir

$$S := \{ s \in \mathbb{R}^m \mid \exists r(s) \in \uparrow : s = (r_1, \dots, \hat{r}_\alpha, \dots, \hat{r}_\beta, \dots, r_{N-1}) \}$$

mit $m = N(h)-3$ und

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(s) := d_h(r(s)) .$$

Das Symbol $\wedge$ zeigt an, daß die entsprechende Komponente ausgelassen wird. Nach einer Bemerkung in §2.3 ist S offen und konvex. Die Funktion d_h und damit f ist mit §2 (18) und (9) letztlich durch die Matrixfunktion $\hat{A}(.)$ definiert. Da sich $\hat{A}(.)$ (bei der Diskretisierung aus §3) als unendlich häufig differenzierbar herausstellt, kann man wie in Lemma 2.2 dies auch von f zeigen.

Während sich jedoch die 1. Ableitung nach Lemma 2.2 noch ohne großen Rechenaufwand ermitteln läßt, treten in den höheren Ableitungen von f auch Ableitungen von z_I^k auf, die dann aus der differenzierten Gleichung §2 (14) gewonnen werden können. Dazu muß man

schon für die 2. Ableitung pro Auswertung $3m$ lineare Gleichungssystem (mit derselben Matrix A_I) lösen. Es erscheint daher günstiger, solche Verfahren zu benutzen, welche die 2. Ableitung approximieren.

Da weiterhin f'' eine volle Matrix ist, wird man von einer Inversion von f'' (oder einer Approximation davon) für jeden Iterationsschritt absehen.

In den numerischen Beispielen erweist sich f'' in der Nähe eines Minimums als 'stark' positiv definit, was bedeutet, daß das Minimum in einem ziemlich 'steilwandigen Trichter' liegt. Man vergleiche hierzu die Abbildung 24 zum Enneperrand.

Diese Umstände stellen hohe Anforderungen an den nicht-linearen Algorithmus. Geeignete Methoden zu einer effizienten Überwindung dieser Schwierigkeiten sind die Algorithmen von BROYDEN(1969a-c), POWELL(1969a-b) und DAVIDON(1975). Die letzte der oben genannten Schwierigkeiten wird von dem Verfahren von BROYDEN mit einer Kontinuitätsmethode, von dem Verfahren von POWELL mit einem wirkungsvollen Dämpfungsmechanismus und von dem Verfahren von DAVIDON mit einer besonderen Technik der Approximation der 2. Ableitung bewältigt.

Man vergleiche dazu die umfangreichen numerischen Versuche von BUS(1976), die das Verfahren von DAVIDON jedoch noch nicht enthalten.

Während die Algorithmen von BROYDEN und POWELL die Gleichung $f'(s) = 0$ lösen und daher auch zur

Berechnung von stationären Punkten herangezogen werden können, findet der Algorithmus von DAVIDON nur lokale Minima. In diesem Falle ist er jedoch bezüglich des Rechenaufwandes und der Zuverlässigkeit allen dem Autor bekannten Methoden weit überlegen. Alle numerischen Beispiele wurden mit diesem Verfahren gerechnet, ohne daß der Algorithmus je versagte.

Ergänzt wurde der Algorithmus von DAVIDON noch durch eine Skalierung der Startnäherung für die 2. Ableitung nach SHANNO & PHUA(1978). Damit kann man in allen Fällen mit der Identität als Näherung der 2. Ableitung starten.

§ 5.3 Ein Diagonalalgorithmus

Aus dem Algorithmus von DAVIDON läßt sich zusammen mit dem Mehrgitter-Algorithmus eine sehr effiziente Kombination gewinnen.

5.1 DIAGONALALGORITHMUS

Ausgehend von einem Parameter s und der Näherung $\hat{z}_I^k$ aus dem vorherigen Schritt (beim 1. Schritt ist $\hat{z}_I^k = 0$) berechnet man zunächst mit 1 MG-Iterationen eine u.U. grobe Näherung von z_I^k . Mit §2 (13) läßt sich der (bis auf kleine Rundungsfehler) exakte Wert des Dirichletintegrals zu $(z_I^k, z_R^k)^T$ berechnen. Als Näherung der Ableitung von f benutzt man die Gleichung §2 (17), obwohl diese eigentlich nur unter der Voraussetzung gilt, daß z_I^k das lineare Gleichungssystem §2 (14) exakt löst. Mit diesen Näherungswerten führt man nun einen Iterationsschritt des Algorithmus von DAVIDON aus, der dann einen neuen Parameter s' liefert u.s.w..

Die Bezeichnung 'Diagonalalgorithmus' wird durch die folgende Überlegung gerechtfertigt.

Mit §2 (11) sei

$$f(z_I, s) := F_s((z_I^k, z_R^k)^T) \quad .$$

Man sucht nun einen Punkt z_I^*, s^* mit

$$f(z_I^*, s^*) = \operatorname{loc} \min_s \min_{z_I} f(z_I, s) .$$

Der Zusammenhang mit der vorhergehenden Bezeichnung ergibt sich aus

$$f(s) = \min_{z_I} f(z_I, s) .$$

Betrachtet man die partielle Ableitung von f nach s an der Stelle (z_I, s) , so ergibt sich gerade derselbe Ausdruck, wie wenn man die rechte Seite von Gleichung §2 (17) für das u.U. nicht minimale z_I auswertet. Das geschieht aber gerade in dem oben erklärten Diagonalalgorithmus.

Man beobachtet, daß die 'Approximation' der 2. Ableitung von f im DAVIDON-Verfahren so 'robust' ist, daß bei geeigneter Wahl der Anzahl l der MG-Iterationen die normalerweise beobachtete superlineare Konvergenz erhalten bleibt.

Bei einem schlechten Startwert für s genügt anfangs jeweils eine MG-Iteration ($l=1$). Erhöht man nach etwa $3m$ Iterationen den Wert von l auf $2-4$ (je nach Problem), so erreicht man in der Regel nach $4m-6m$ Iterationen insgesamt ein genügend genaues Ergebnis.

§ 5.4 Wahl der Startwerte

Beim Start des Algorithmus muß man für den Parameter $s \in \mathbb{R}^m$ einen Startwert angeben. Betrachtet man Definition 2.1, so kann man die Komponenten von s als eine Teilung des Intervalls $(0, 2\pi)$ bzw. von ∂B auffassen. Wenn es bei gegebener Randkurve nur eine Lösung gibt, oder wenn man nicht eine bestimmte Lösung von mehreren möglichen haben möchte, ist die Wahl des Startwertes völlig unproblematisch. In diesen Fällen startet man mit dem s , das $(0, 2\pi)$ äquidistant teilt.

Weiterhin hängt die Anzahl der benötigten Iterationen nicht allzu empfindlich von der Güte des Startwertes ab. Dies ist ein großer Vorteil, da viele Algorithmen gute Startnäherungen benötigen, um überhaupt zu konvergieren.

Beim Übergang zu einem kleineren Wert von h läßt sich für das genauere Problem leicht mit Interpolation ein Startwert aus dem letzten Wert des gröberen Gitters gewinnen.

Im Falle mehrerer Lösungen könnte man mit Hilfe von konstruktiven Fixpunktverfahren oder 'kontinuierlichen' NEWTON-Verfahren alle oder zumindest mehrere Nullstellen von f' finden. Dies wird jedoch heutzutage i.A. noch zu aufwendig sein.

In praktischen Fällen läßt sich eine Startnäherung in den meisten Fällen leicht raten. Hat man z.B. eine

Vorstellung von der Minimalfläche oder ein Modell (Seifenhaut) und verbindet (gedacht) die Diskretisierungspunkte auf dem Rande mittels geodätischer Linien mit dem 'Mittelpunkt' der Fläche, so ergibt das Bogenmaß der Winkel dieser Geodäten im 'Mittelpunkt' eine gute Schätzung für den Parameter s . Damit konnten relativ gute Schätzungen der Parameter bei den hier angegebenen numerischen Beispielen gefunden werden, die meistens auf Anhieb zu der gewünschten Lösung führten.

§ 5.5 Die 3-Punkte-Bedingung und Symmetrien

Es hat sich gezeigt, daß im Diskreten ein Festhalten von 3 Punkten den Wert des Dirichletintegrals am Minimum erhöht, während asymptotisch zu erwarten ist, daß man 3 Punkte festhalten kann, ohne daß der minimale Wert erhöht wird. Auch wurden beim Festhalten nur eines Punktes zumindest bei praxisnahen Werten von h keine Konvergenzschwierigkeiten festgestellt, obwohl asymptotisch das Problem nicht eindeutig ist. Bei allen hier angegebenen numerischen Beispielen wurden jedoch sogar 4 und teilweise 8 Punkte festgehalten. Dies ergibt sich aus der Symmetrie der Randkurven. Diskretisiert man eine Randkurve mit einer oder mehreren Symmetrieachsen in 'symmetrischer' Weise, so bilden die

Urbilder unter der vorgegebenen Randparametrisierung
§ Fixpunkte der optimalen Umparametrisierung, und die
Funktion $f(s)$ spiegelt die Symmetrien wieder. Daher
lassen sich diese Symmetrien dazu benutzen, die Anzahl
der nichtlinearen Unbekannten und damit den Rechenauf-
wand um mehr als den Faktor 4 und manchmal 8 zu redu-
zieren.

§ 5.6 Komplexitätsbetrachtungen

Man kann sagen, daß mit Hilfe des Verfahrens 2.4 ein
zweidimensionales nichtlineares Problem (die Minimie-
rung des Flächenfunktional) auf ein eindimensionales
nichtlineares Problem reduziert wird. Dabei wird der
Umstand, daß eine Funktionsauswertung die Lösung eines
zweidimensionalen linearen Problems erfordert, mehr als
kompensiert. Unterstellt man einmal die Erfahrungs-
werte, daß der oben erwähnte DAVIDON-Algorithmus $O(m)$
Funktions- und Gradientenauswertungen und $O(m^2)$ arith-
metische Operationen benötigt und daß weiterhin eine
Funktions- und Gradientenauswertung mit Hilfe des MG-Algo-
rithmus $O(h^{-2})$ arithmetische Operationen benötigt, so
kommt man auf $O(h^{-3})$ Operationen insgesamt, da
 $m = O(h^{-1})$ gilt (vgl. §3).

Ein direktes Angehen des zweidimensionalen nichtline-
aren Problems würde jedoch $O(h^{-4})$ Operationen

erfordern, wobei diese Rate noch günstig erscheint, da so effiziente Algorithmen wie der von DAVIDON aus Speicherplatzgründen kaum auf dieses Problem anwendbar sind; so würden z.B. schon die hier gebrachten numerischen Beispiele Speicherplatz von ca. 800.000 Gleitkommazahlen erfordern.

Daher erscheint unser Verfahren auch im Falle der nichtparametrischen Flächen, für den zahlreiche andere Verfahren zur Verfügung stehen, durchaus konkurrenzfähig.

§ 6 NUMERISCHE BEISPIELE

§ 6.0 Allgemeines

Unser Algorithmus - in der Fassung des Diagonalalgorithmus 5.1 - wurde auf eine Reihe von in der Literatur bekannten Randkurven angewandt.

Dabei werden die Randkurven (für das Computerprogramm) nur in Form der Koordinaten der Diskretisierungspunkte und unter Angabe des Symmetrietyps festgelegt.

Der Typ der Diskretisierung für den Fall, daß die Umparametrisierung am Rande gleich der Identität ist, wird in den Abbildungen 4-7 dargestellt. Dabei wird der Einheitskreis - das Parametergebiet - in 16 äquidistante Radien und 64 sich frei einstellende Sektoren unterteilt. Berücksichtigt man die Raumdimension der Randkurve, so ergeben sich 3 mal 621 Unbekannte bei 684 Finite-Elementen.

Zu den angegebenen Resultaten ist allgemein folgendes zu sagen :

Die sich jeweils ergebende Umparametrisierung wird nur im Intervall $[0, \pi/2]$ angegeben, weil sich die Umparametrisierung in $[0, 2\pi]$ daraus mittels Symmetrie ergibt, da alle hier angegebenen Randkurven mindestens zwei Symmetrieachsen haben (vgl §5.5). Es soll hier noch einmal darauf hingewiesen werden, daß sich diese Symmetrien in der diskreten Umparametrisierung von selbst einstellen, auch wenn man sie nicht numerisch

ausnutzt und damit erzwingt.

Die angegebenen Werte des Dirichletintegrals, das anschaulich die Spannungsenergie der Fläche wiedergibt, wird unmittelbar vom Algorithmus selbst geliefert. Demgegenüber wurde der Flächeninhalt A der Finite-Element-Approximation nachträglich durch Addition aller Flächeninhalte der einzelnen Elemente berechnet. Dabei wurden die Flächeninhalte der bilinearen Elemente mittels einer 64-Punkt-Gaußformel berechnet, da eine explizite Integration uns nicht bekannt war. Die Anwendung dieser sehr exakten Quadraturformel stellt in jedem Falle sicher, daß der angegebene Flächeninhalt bis in die letzte Dezimale exakt ist.

§ 6.1 Die RIEMANN-SCHWARZ-Fläche

Das PLATEAU'sche Problem für diesen Rand wurde zuerst - und zwar explizit - von H.A. SCHWARZ 1865 und etwa gleichzeitig von RIEMANN behandelt. Diese Randkurve besitzt eine eindeutige konvexe Projektion und berandet daher genau eine Minimalfläche. Die genauen Daten entnehme man der Abbildung 9. Obwohl diese Fläche auch nichtparametrisch dargestellt werden kann, bietet sie in besonderer Weise einen guten Testfall für unseren Algorithmus. Bei der numerischen Lösung wurde weder die Tatsache, daß diese Fläche als Graph darstellbar ist, noch, daß es genau eine Lösung gibt, ausgenutzt.

Sowohl die Randkurve als auch die Minimalfläche besitzt eine 4-fache Symmetrie, was eine Reduktion des Rechenaufwandes um mehr als den Faktor 8 ermöglicht. Zunächst liegt eine Klappsymmetrie bzgl. der Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ vor; weiterhin herrscht Symmetrie bzgl. der Geraden mit den Richtungsvektoren $(1,1,0)^T$ und $(1,-1,0)^T$. Diese Symmetrien erkennt man auch gut an den Abbildungen 12-14. Die Teilstücke dieser Geraden λu mit $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ liegen in der Minimalfläche (NITSCHKE(1975) §84), was auch von der Finite-Element-Approximation gut widergegeben wird (siehe Abb. 12). Auch die berechnete Upparametrisierung (Abb. 13) ist bezüglich des Punktes $(\pi/4, \pi/4)$ symmetrisch. Die RIEMANN-SCHWARZ-Fläche eignet sich auch gut für (grobe) Konvergenzbetrachtungen. Der exakte Flächeninhalt (A_e) ist (zumindest bis auf 1%) bekannt (NITSCHKE(1975) S.247), und außerdem tritt wegen des polygonalen Randes kein Beitrag zum Fehler aus der Approximation des Randes auf. Die Tabelle in Abbildung 27 scheint für das Dirichletintegral die theoretische und asymptotische Konvergenzordnung $O(h)$ zu bestätigen; die Zahlen für den Flächeninhalt deuten möglicherweise auf eine etwas höhere Konvergenzordnung hin.

§ 6.2 Die WIENER-SCHWARZ-Fläche

Diese Fläche (siehe Abb. 10, 15 und 16) ist eng verwandt mit der RIEMANN-SCHWARZ-Fläche, da sie aus Teilen davon aufgebaut gedacht werden kann. Dementsprechend ist auch ihr exakter Flächeninhalt bekannt. Aus den gleichen Gründen wie in §6.1 ist die WIENER-SCHWARZ-Fläche die einzige Minimalfläche in dem Rand von Abbildung 10. Sie besitzt einen noch höheren Symmetriegrad als die RIEMANN-SCHWARZ-Fläche; so liegen die ausgeschnittenen Stücke der drei Geraden durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten in der Fläche. Die hier zusätzlich auftretende 3-fach-Symmetrie ließ sich mit unserer Standarddiskretisierung nicht ausnutzen, da dabei das Intervall $[0, 2\pi]$ für die Umparametrisierung in 2^1 Teile geteilt wurde. Eine Ausnutzung der Symmetrie wäre jedoch mit der verallgemeinerten h -Folge aus §5.1 möglich. Trotzdem zeigt sich diese weitere Symmetrie in der gefundenen Umparametrisierung in Abbildung 16.

§ 6.3 Die WIENER-COURANT-Randkurve

Diese zuerst von N. WIENER angegebene Randkurve besteht in unserem Falle aus zwei 300° -Sektoren von 'konzentrischen' Kreisen mit Radius 1 in parallelen

Ebenen vom Abstand 1,5 , deren Randpunkte durch Geradenstücke miteinander verbunden sind; siehe auch die Abbildung 11. COURANT(1951,S.120) weist darauf hin, daß diese Kurve (mindestens) zwei Minimalflächen berandet. Diese Flächen wurden numerisch sehr genau von HINATA & SHIMASAKI & KIYONO (1974) und WAGNER(1977) untersucht; sie studierten die Abhängigkeit der Lösungen von dem Abstand der Ebenen. In dem Falle des Abstandes 1,5 , der auch hier behandelt wurde, fanden diese Autoren auch numerisch zwei Lösungen. Da die Approximation der Randkurve bei uns mit der in den oben genannten Arbeiten übereinstimmt, lassen sich die Werte für den Flächeninhalt vergleichen. Dabei ist unser Wert etwas niedriger, was vermutlich daran liegt, daß unsere Diskretisierung (im Inneren) mehr Elemente enthält. Die beiden Lösungen und die zugehörigen Umparametrisierungen entnehme man den Abbildungen 17-19 .

§ 6.4 Die ENNEPER-Randkurve

Diese Kurve hat über dem Rand des Einheitskreises die parametrische Darstellung

$$(1) \quad \vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta - R^3/3 \cos 3\theta \\ -R \sin \theta - R^3/3 \sin 3\theta \\ R^2 \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad .$$

Dabei hängt die Kurve noch von dem Parameter R ab. Für $R < 1$ hat die Kurve eine eindeutige, konvexe Projektion und berandet dann genau eine Minimalfläche.

Für $1 \leq R < \sqrt{3}$ ist die Zahl der Lösungen noch nicht geklärt, jedoch zeigt NITSCHKE(1968,1976), daß es für R nahe bei $\sqrt{3}$ mindestens drei Lösungen gibt.

Wir haben diese Kurve mit $R = 1,5$ untersucht und zunächst zwei (wahrscheinlich absolute) Minima gefunden. Siehe die Abbildungen 20 und 21. Diese beiden Flächen gehen zwar durch Kongruenzoperationen ineinander über, sie sind aber zwei verschiedene Lösungen (NITSCHKE(1976)). Dies zeigen auch ihre beiden unterschiedlichen Umparametrisierungen in Abbildung 23.

Der genaue Flächeninhalt dieser beiden Flächen ist nicht bekannt, jedoch zeigt NITSCHKE(1975,\$392), daß $8 \cdot \sqrt{2} / 15 R^3 (5 + 3 \cdot R^2)$ ($R = 1,5$ ergibt 29,91..) eine untere Schranke ist.

Einen ganz besonders interessanten Testfall stellt nun die dritte Lösung - die eigentliche ENNEPER-Fläche - dar. Die explizite parametrische Darstellung ist bekannt; man erhält für den Ortsvektor $x(r,\theta)$ die Ausdrücke in (1), wenn man R durch das Produkt (rR) ersetzt. Damit ist in diesem Falle sogar die explizite Randparametrisierung bekannt. Benutzt man für die Parametrisierung γ von Γ gerade die Ausdrücke (1),

so liefert die Identität als Upparametrisierung gerade die ENNEPER-Fläche. Wir haben also hier eine Fläche, bei der die exakte Upparametrisierung bekannt ist. Die numerisch gefundene Upparametrisierung stimmt nun so gut mit der Identität überein, daß man in Abbildung 23 keine Abweichung erkennen kann (Die Identität ist die Diagonale in Abb. 23). In der Supremumsnorm stellt man eine Abweichung von weniger als $7 \cdot 10^{-5}$ fest. Daß sich überhaupt eine Abweichung ergibt, liegt vermutlich an der polygonalen Approximation des Randes. Die sich ergebende Finite-Element-Approximation für die ENNEPER-Fläche zeigt die Abbildung 22. Für den exakten Flächeninhalt (A_e) ergibt sich nach NITSCHKE(1968) S. 6 der Ausdruck

$$A = \pi R^2 (1 + R^2 + R^4/3) \quad (R=1,5 \text{ ergibt } 34,9011).$$

Daß die Fläche der Finite-Element-Approximation kleiner als die exakte Fläche ist, bedeutet keinen Fehler sondern rührt daher, daß die exakte Fläche durch die polygonale Näherung des Randes kleiner ist. Es bleibt noch zu erwähnen, daß die Geradenstücke $\lambda(1,1,0)^T$ und $\lambda(1,-1,0)^T$ für $|\lambda| \leq R + R^3/3$ auf der ENNEPER-Fläche liegen, was man leicht mittels ihrer impliziten kartesischen Gleichung (NITSCHKE(1975), §89) nachprüft. Diese Geradenstücke liegen nun auch bis auf den Rundungsfehler (10^{-10}) auf der Finite-Element-Approximation. (siehe Abb. 22).

Für $R < 1$ ist die ENNEPER-Fläche die einzige Minimalfläche, die von der Kurve (1) berandet wird; sie stellt also in diesem Falle ein absolutes Minimum dar.

Für $R > 1$ ändert sich die Situation: nun ist die ENNEPER-Fläche eine instabile Minimalfläche (NITSCHKE (1976)).

Es ist nun verwunderlich, daß wir mit der Fassung unseres Algorithmus, die nur auf lokale Minima zugeschnitten ist, auch eine Finite-Element-Approximation erhalten, die eine sehr gute Näherung der ENNEPER-Fläche ist.

Die Erklärung dafür ist, daß im endlich-dimensionalen approximativen Problem die zur ENNEPER-Fläche gehörende Näherung stabil ist. Dies wird durch folgenden numerischen Versuch bestätigt:

Verbindet man die numerisch gefundenen Umparametrisierungen der beiden Minima x_1 (bzw. x_2) mit der Umparametrisierung der approximativen ENNEPER-Fläche x_0 durch eine lineare Homotopie und berechnet an einigen Zwischenstellen das Dirichletintegral der Finite-Element-Approximationen zu den entsprechenden Randwerten, so ergibt sich die Abbildung 24.

Die sich dabei ergebende stabilisierende kleine 'Eindellung' bei x_0 läßt sich folgendermaßen erklären: Das Dirichletintegral der Harmonischen ändert sich in der Nähe von x_0 nur wenig; demgegenüber ist der Approximationsfehler für die völlig regelmäßige

Diskretisierung, die zu x_0 gehört, dort minimal.
Für die Summe der beiden ist dann der in Abbildung 24
gezeigte Verlauf durchaus einsehbar.

§ 6.5 Ein Hindernisproblem

Die Verallgemeinerung unseres Algorithmus auf Hinder-
nisprobleme (siehe §7) wurde auf folgendes Beispiel an-
gewandt: Gesucht wird die Minimalfläche, die von der
Randkurve der RIEMANN-SCHWARZ-Fläche berandet wird und
deren Ortsvektor bei der in Abbildung 9 angegebenen
Wahl des Koordinatensystems die Ungleichung

$$z \geq \Psi(x, y) \quad \text{mit}$$

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} -\infty & \text{für } x^2 + y^2 > 0,25^2 \\ \sqrt{0,25^2 - x^2 - y^2} & - 0,1 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt. Das Hindernis ist also eine Halbkugel mit
dem Radius 0,25 um den Mittelpunkt $(0;0;-0,1)^T$.
Abbildung 25 zeigt die sich ergebende Näherung und
Abbildung 26 deren Projektion auf die Ebene $z = 0$.
In Abbildung 25 ist (per Hand) der freie Rand skiz-
ziert worden, während Abbildung 26 die ganze Kontakt-
menge zeigt. Wie diese Abbildung und noch genauer die
Abbildung 13 zeigt, ändert sich die 'optimale' Umpara-
metrisierung.

§ 7 AUSBLICK : BEHANDLUNG VON HINDERNISPROBLEMEN

Wir wollen hier andeuten, wie sich das Verfahren 2.4 auf ein Hindernisproblem anwenden läßt.

Bei einer bestimmten Wahl eines Koordinatensystems im $\mathbb{R}^3$ sei das Hindernis durch eine Funktion

$g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Die Menge der Funktionen aus $H^1(B)$, die den Rand ∂B monoton auf die gegebene Jordankurve Γ abbilden, werde mit $\mathcal{A}_0$ bezeichnet. Wir definieren nun als Klasse von , zulässigen Flächen :

$$\mathcal{A}(\Gamma; g) := \mathcal{A}_0 \cap \{x(u, v) = (x^1, x^2, x^3) \in H^1(B) \mid x^3 \geq g(x^1, x^2)\}$$

Damit betrachten wir das Problem

(P_0) minimiere (lokal) das Flächenfunktional A
in $\mathcal{A}(\Gamma; g)$.

Da sich auch Flächen, die P_0 lösen, konform parametrisieren lassen (MORREY(1966), Ch. 9), kann man wieder vom Flächenfunktional zu dem einfacheren Dirichletintegral übergehen.

Es sei T der metrische Raum der zulässigen Uparametrisierungen auf ∂B aus Definition 1.8 .

Sei weiter γ eine feste Parametrisierung der gegebenen Jordankurve Γ .

Für $\tau \in T$ sei

$$A(\tau) := \{ x \in A(\Gamma; g) \mid x|_{\partial B} = \gamma \circ \tau \}$$

Damit können wir folgende Funktion auf T definieren

$$d_0(\tau) := \min_{x \in A(\tau)} D(x)$$

Wir erhalten das Problem

(P'_0) suche ein $\tau^* \in T$, das $d_0(\cdot)$ (lokal) minimiert.

Die Existenz einer Lösung von P'_0 wurde von TOMI(1970, 1971, 1972) gezeigt.

Die Approximation von P'_0 verläuft nun völlig analog wie in §2. Der einzige Unterschied besteht darin, daß in dem endlich-dimensionalen Finite-Element-Raum $Y(\tau_h)$ aus §2 (5) nun noch die Hindernisbedingung wie in $A(\Gamma; g)$ eingearbeitet werden muß. Dabei beschränkt man sich darauf, daß man nur von den Eckpunkten der Finite-Elemente verlangt, daß sie über dem Hindernis g liegen.

Algorithmisch gesehen liegt die entscheidende (neue) Schwierigkeit in der effizienten Minimierung des Dirichletintegrals über einer endlich-dimensionalen Teilmenge von $A(\tau)$, was für jede Funktionsauswertung

von $d_0(.)$ nötig ist.

Man kommt dabei auf ein Problem der nichtlinearen Optimierung. Da im folgenden die Umparametrisierung τ fest ist, drücken wir auch in der Notation die Abhängigkeit von τ nicht aus.

Wir gehen von dem Ausdruck §2 (9) für das Dirichletintegral aus und zerlegen $\hat{A}$ wie in §2 (12). Zur Vereinfachung ändern wir die Notation.

$$\begin{aligned} x &:= z_I^1; & y &:= z_I^2; & z &:= z_I^3; \\ A &:= A_I; & b_k &:= -B z_R^k, & 1 \leq k \leq 3; \\ x, y, z, b_k &\in \mathbb{R}^M; & A &\in \mathbb{R}^{M \times M}; \end{aligned}$$

Die Funktion $: \mathbb{R}^{2M} \longrightarrow \mathbb{R}^M$, die (x, y) auf den Vektor $(g(x_k, y_k))$, $1 \leq k \leq M$, abbildet, bezeichnen wir ebenfalls mit g . Um die Nebenbedingung $z \geq g(x, y)$ einfacher schreiben zu können, zerlegen wir z in

$$z = g(x, y) + \bar{z}.$$

Dann stimmt das Dirichletintegral aus §2 (9) bis auf die Konstante $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 z_R^{kT} A_R z_R^k$ mit dem folgenden Funktional überein.

$$\begin{aligned} J(x, y, \bar{z}) &:= J_1(x) + J_2(y) + J_3(x, y, \bar{z}) \quad \text{mit} \\ J_1(x) &:= \frac{1}{2} x^T A x - b_1^T x \\ J_2(y) &:= \frac{1}{2} y^T A y - b_2^T y \end{aligned}$$

$$J_3(x, y, \bar{z}) := \frac{1}{2} (g(x, y) + \bar{z})^T A (g(x, y) + \bar{z}) - b_3^T (g(x, y) + \bar{z}) .$$

Wir erhalten mit diesen Bezeichnungen das folgende approximative Dirichletproblem mit Nebenbedingungen.

Suche $x^*, y^*, \bar{z}^*$ mit $\bar{z}^* \geq 0$ und

$$J(x^*, y^*, \bar{z}^*) = \min_{\substack{(x, y, \bar{z}) \\ \bar{z} \geq 0}} J(x, y, \bar{z})$$

Für dieses Problem existiert ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}^M$, mit dem man dann ein gekoppeltes nicht-lineares Gleichungssystem erhält.

$$\begin{aligned} (1) \quad A x &= b_1 - g_x^T \lambda \\ A y &= b_2 - g_y^T \lambda \\ A z &= b_3 - \lambda \end{aligned} \quad \lambda_k \cdot z_k = 0, \quad 1 \leq k \leq M$$

Mit g_x und g_y wurden dabei die partiellen Ableitungen von g bezeichnet.

Wegen der speziellen Struktur von g - die k -te Komponentenfunktion hängt nur von den k -ten Komponenten der beiden Argumentvektoren ab - ist das System nur schwach gekoppelt.

Wir betrachten nun den folgenden Algorithmus

Schritt 1 $\mu := A z - b_3$
 $\lambda' := (1 - \xi) + \xi \mu$
 $\lambda := \lambda'$

Schritt 2 iteriere j mal

$\delta_1 := b_1 - g_x^T \lambda$
 $\delta_2 := b_2 - g_y^T \lambda$
 löse näherungsweise die Gleichungen
 $A x' = \delta_1$ und $A y' = \delta_2$.

Schritt 3 $\bar{z} := z - g(x', y')$
 $\delta_3 := b_3 - A g(x', y')$

 suche $\min_{\bar{z} \geq 0} \frac{1}{2} \bar{z}^T A \bar{z} - \delta_3^T \bar{z}$

 iterativ mit dem Startwert $\bar{z}$;
 dies liefere $\bar{z}'$

Schritt 4 $x := x' ; \quad y := y' ; \quad z := \bar{z}' + g(x', y')$
 falls nicht genügend Gesamtiterationen,
 gehe zu Schritt 1 .

BEMERKUNGEN

zu Schritt 1 Wir berechnen zunächst aus der 3.

Gleichung von (1) den neuen Lagrange-Multiplikator μ , den wir aber dann nicht so weiterverwenden, sondern etwas konservativer mit $g \approx 0,3$ den bisherigen Multiplikator in Richtung des neuen ändern. Diese Dämpfung hat sich als notwendig erwiesen, um Oszillationen des Algorithmus zu vermeiden.

zu Schritt 2 Es werden nun entsprechend den ersten

beiden Gleichungen in (1) die anderen beiden Komponenten z.B. mit je einer Iteration des in §5 beschriebenen Mehrgitter(MG)-Algorithmus an den neuen Lagrange-Multiplikator aus Schritt 1 angepaßt.

Da dabei $g_x(x,y)$ und $g_y(x,y)$ noch von x und y abhängen, muß man Schritt 2 in einer Schleife j -mal wiederholen. In unserem numerischen Beispiel in §6.5 war $j = 3$.

zu Schritt 3 Nun wird die 3. Komponente - z -

an das 'neue' Hindernis $g(x',y')$ angepaßt. Dies geschieht z.B. mit einigen Iterationen eines abgewandelten Mehrgitter-Algorithmus, der die transformierte Nebenbedingung $\bar{z} \geq 0$ berücksichtigt.

Auf die dazu nötige Änderung des MG-Algorithmus, wie sie bisher noch nicht untersucht wurde, soll hier nicht näher eingegangen werden, da dies den Rahmen eines Ausblickes sprengen würde.

In unserem Beispiel wurde der Parameter k auf 7 gesetzt, was daran liegt, daß die Kontraktionszahl einer abgewandelten MG-Iteration zwar noch h -unabhängig, aber größer als die des Ausgangsalgorithmus ist. Dies liegt u.a. daran, daß die sehr effiziente Blockrelaxation - wie in §5.1 beschrieben - hier nicht mehr verwendet werden kann.

Es bleibt zu bemerken, daß dieser Algorithmus wieder mit dem DAVIDON-Verfahren zu einem Diagonalalgorithmus analog zu §5.3 kombiniert werden kann. Dieser Algorithmus - obwohl theoretisch noch nicht genügend untersucht - ist viel schneller als ein direktes Minimieren des Flächenfunktionals mit Nebenbedingungen.

Damit wurde auch unser Beispiel in §6.5 berechnet.

Auch zur Lösung ähnlicher Probleme wäre die Entwicklung von Algorithmen zur schnellen Lösung von linearen Variationsungleichungen äußerst wünschenswert.

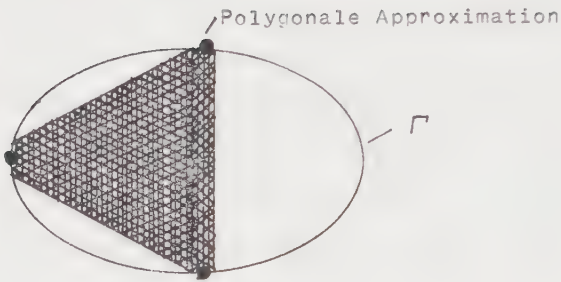
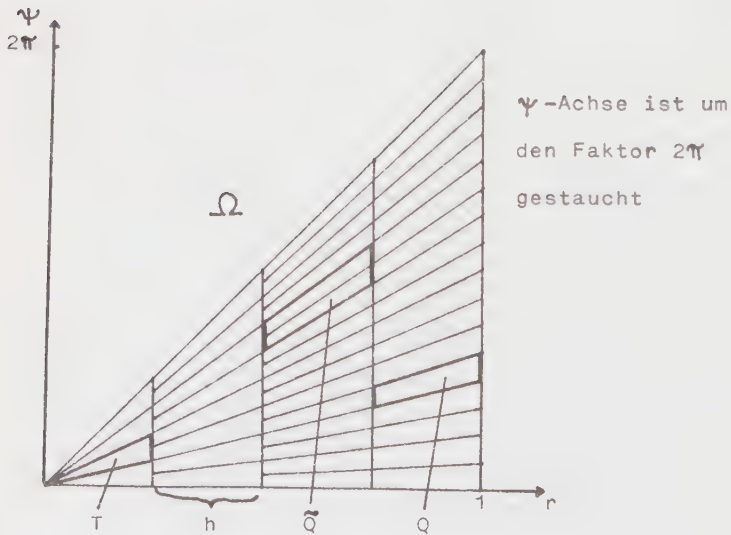
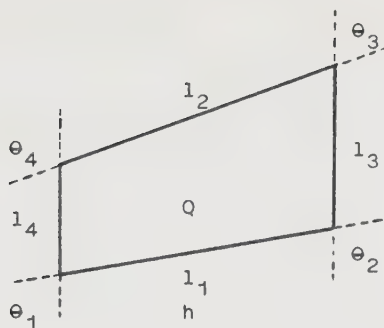


Abbildung 1 (siehe § 1.3)

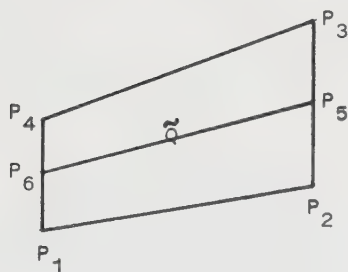


Diskretisierung $\hat{\mathfrak{A}}_2$

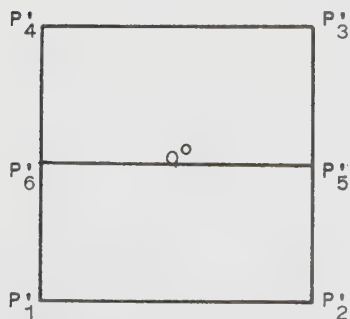
Abbildung 2 (siehe § 3.4)



Abbildungung 3a (siehe § 3.4)



Abbildungung 3b (siehe § 3.4)



Abbildungung 3c (siehe § 3.5)

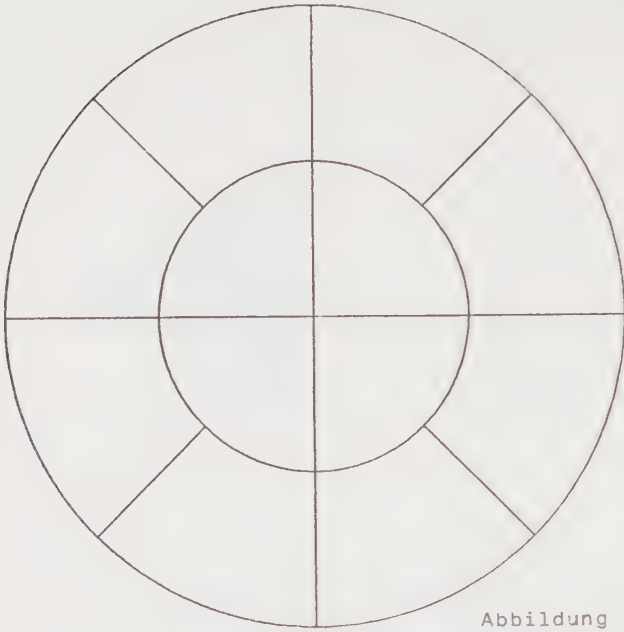


Abbildung 4

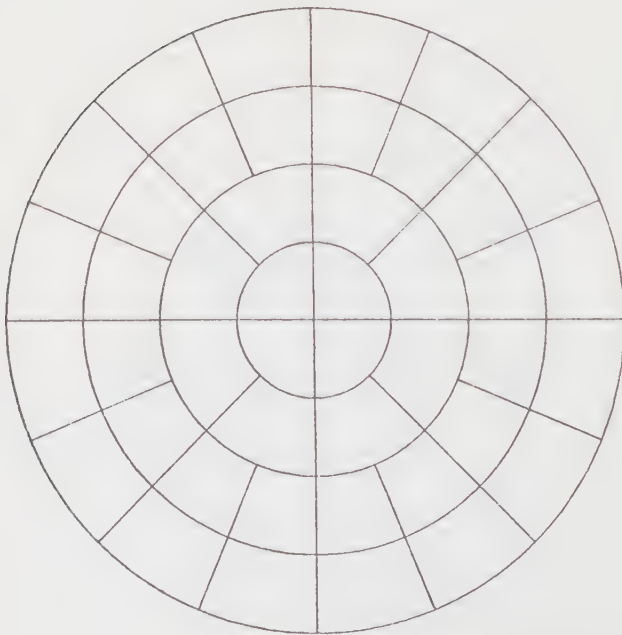


Abbildung 5

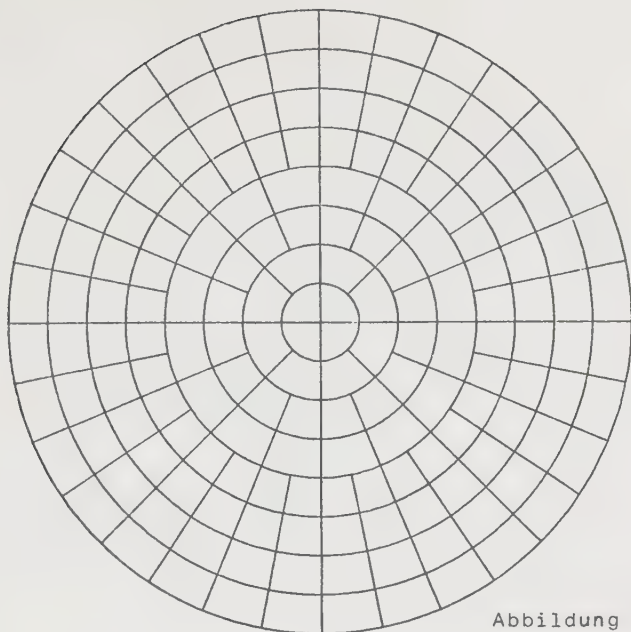


Abbildung 6

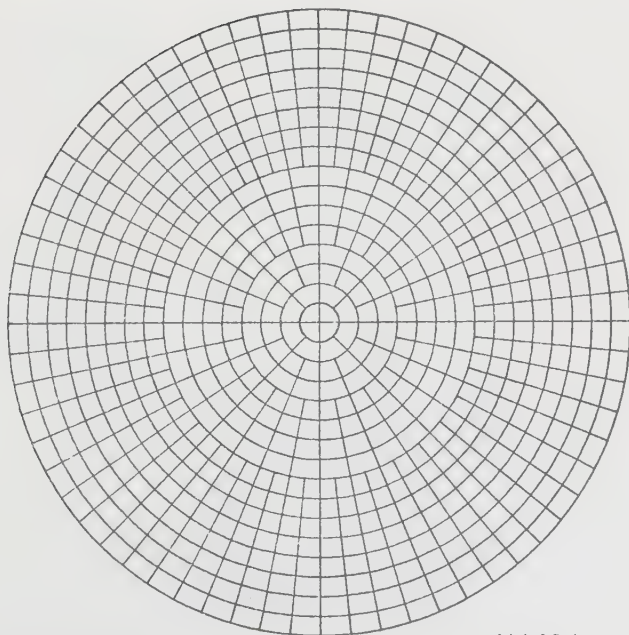


Abbildung 7

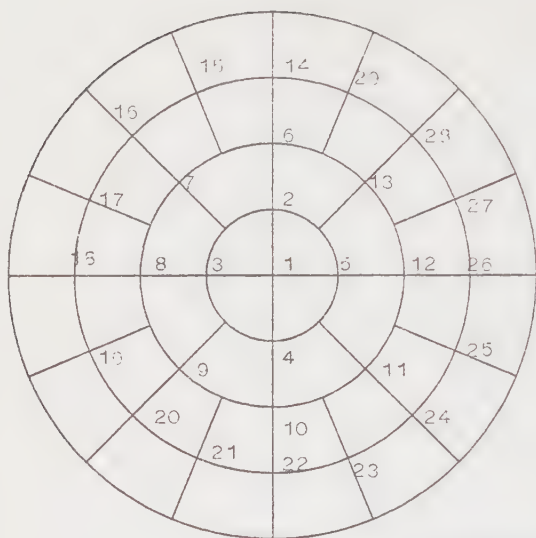


Abbildung 8

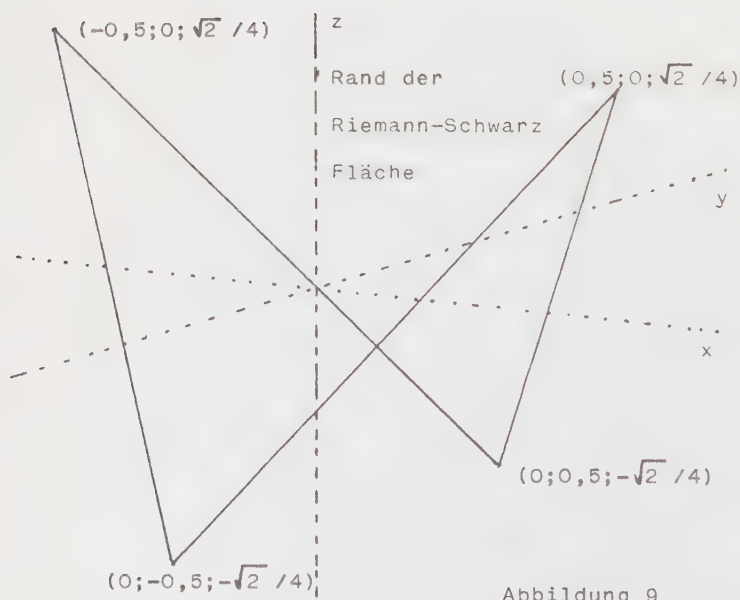
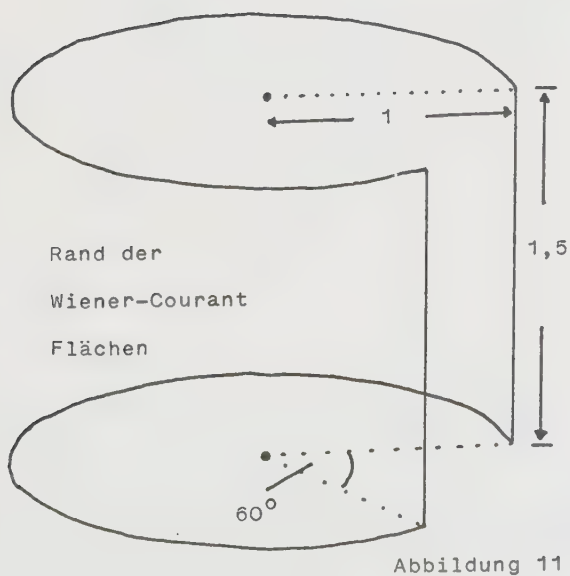
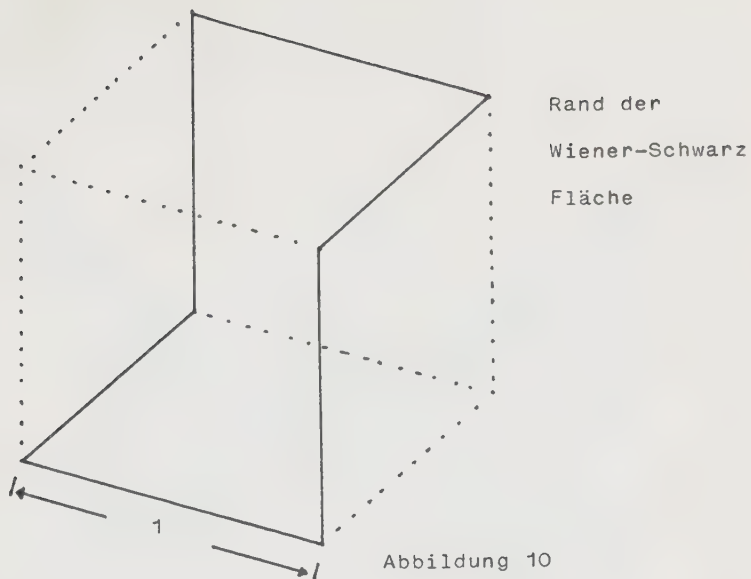


Abbildung 9



RIEMANN-SCHWARZ-FLÄCHE

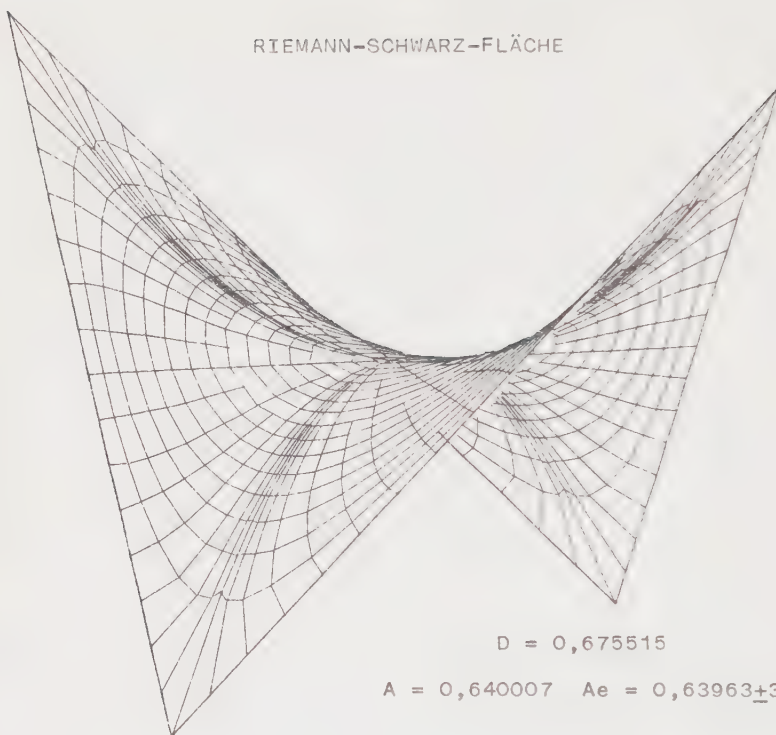


Abbildung 12

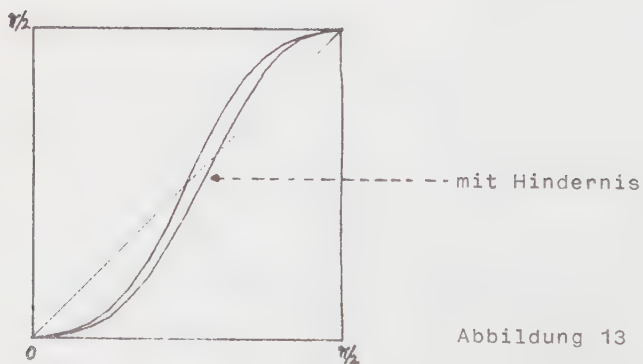
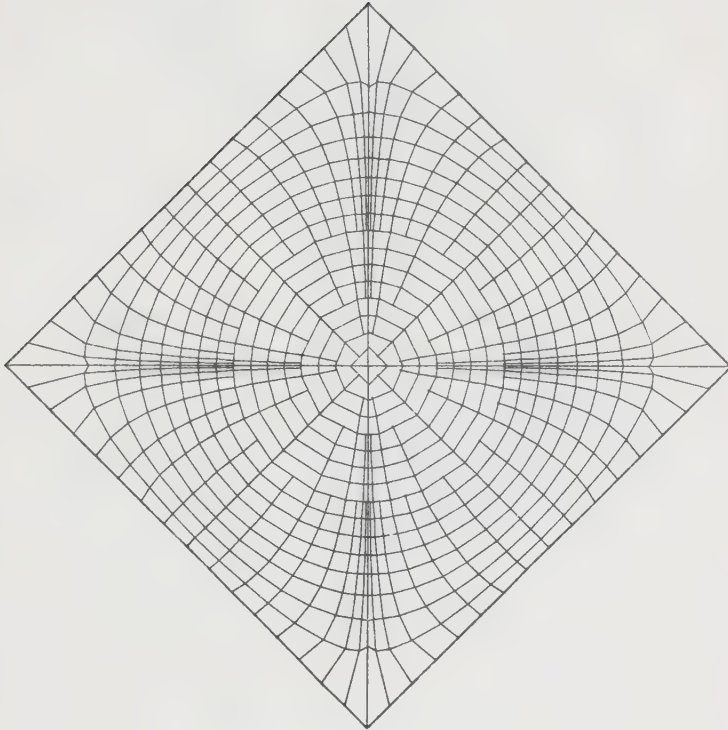


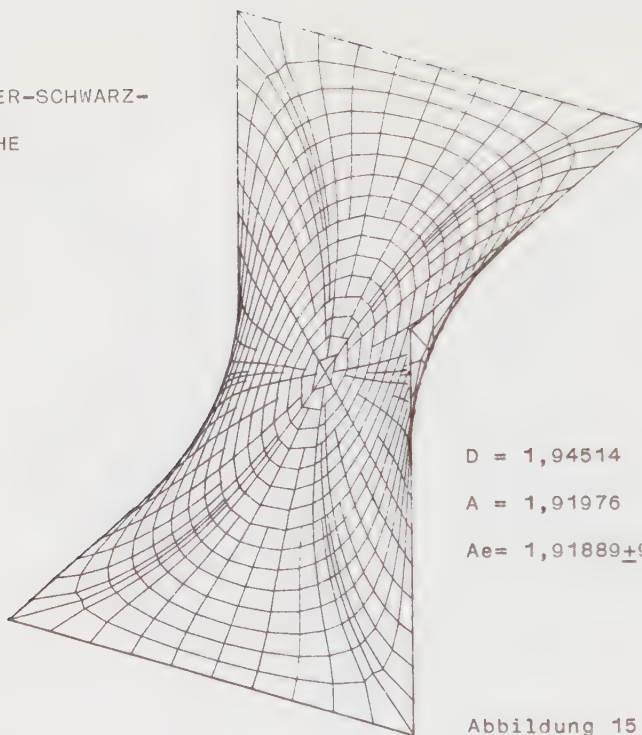
Abbildung 13



Projektion der RIEMANN-SCHWARZ-Fläche
auf die Ebene $z = 0$

Abbildung 14

WIENER-SCHWARZ-
FLÄCHE



$$D = 1,94514$$

$$A = 1,91976$$

$$Ae = 1,91889 \pm 9 \cdot 10^{-5}$$

Abbildung 15

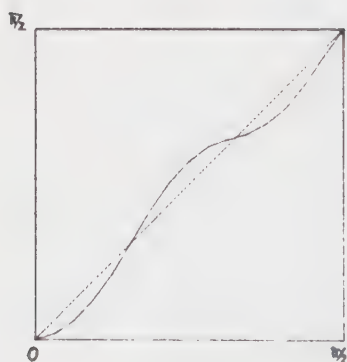


Abbildung 16

WIENER-COURANT-RAND
große Lösung

$$D = 7,05226$$

$$A = 6,99449$$

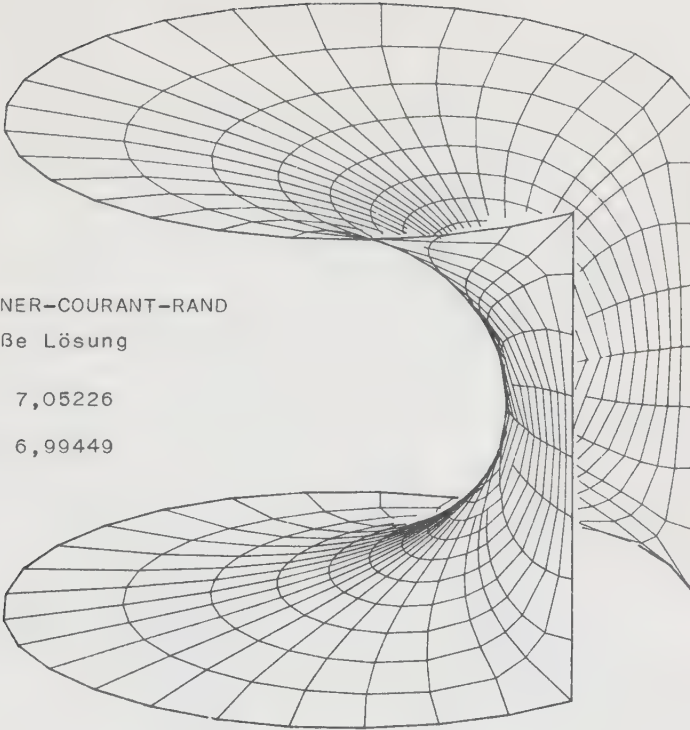


Abbildung 17

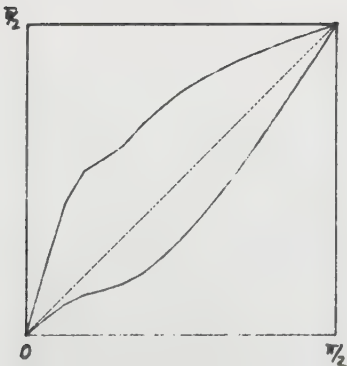
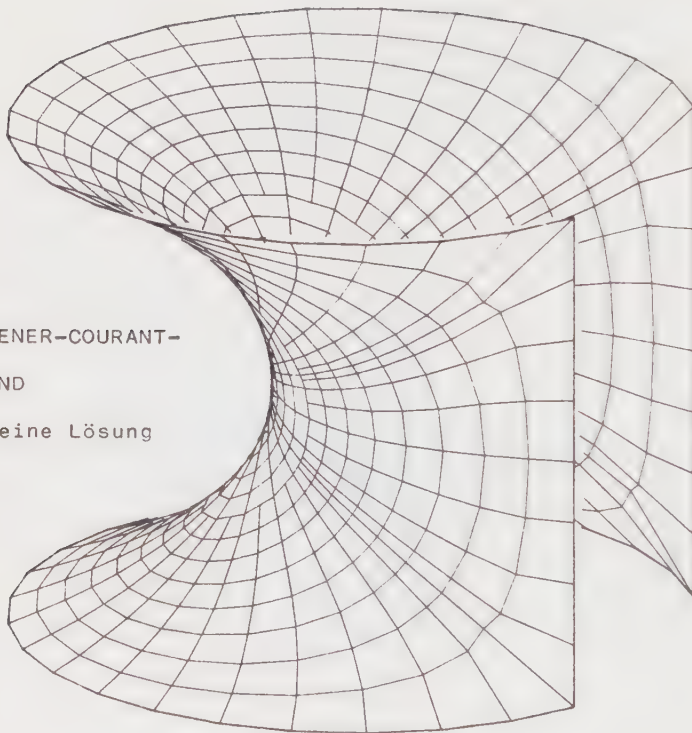


Abbildung 18

WIENER-COURANT-
RAND
kleine Lösung

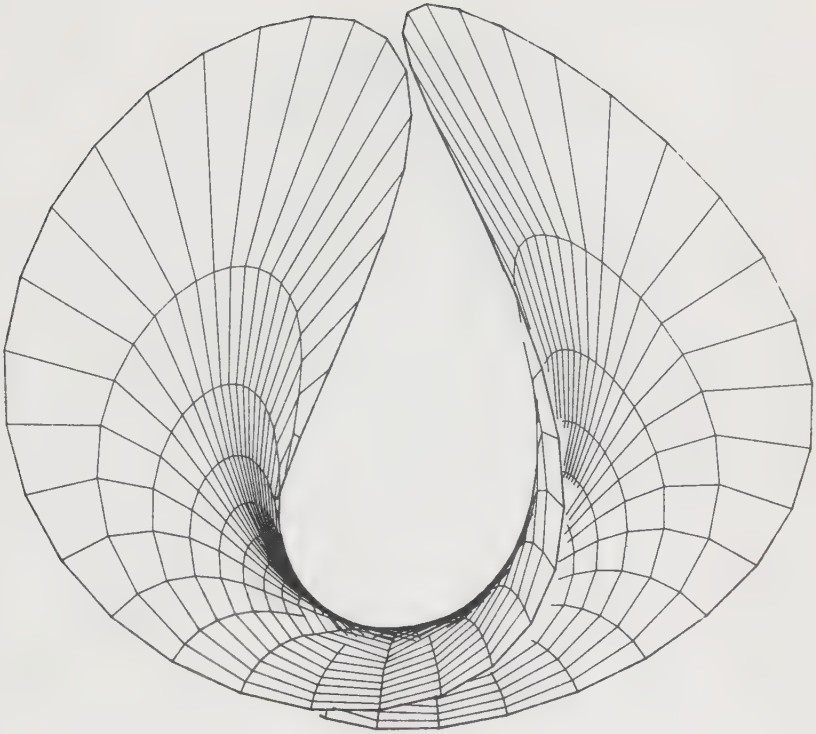


$D = 7,13181$ $A = 7,05679$

Abbildung 19

ENNEPER-RAND

1. Minimallösung

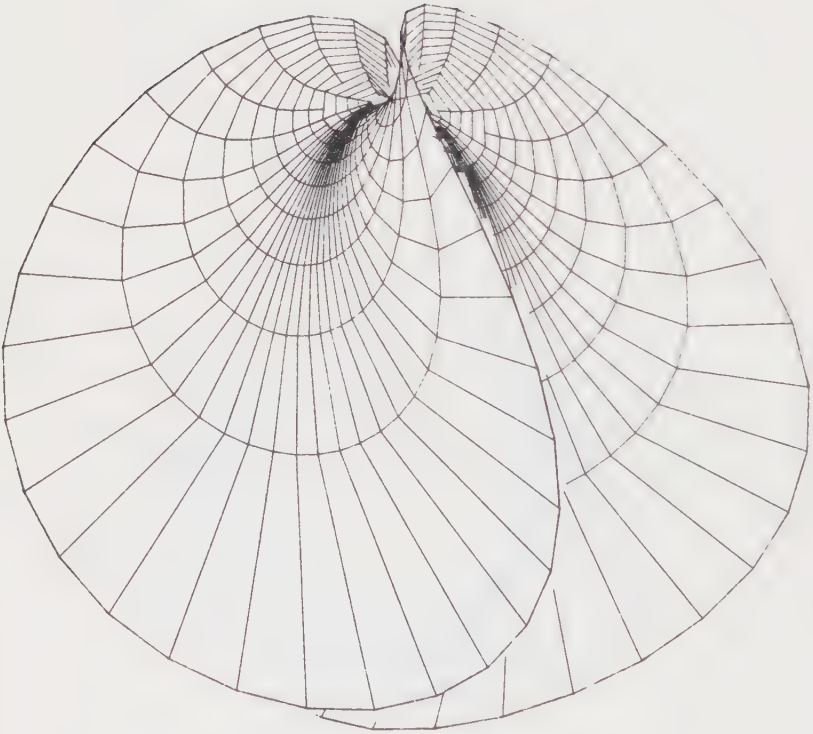


D = 32,9589 A = 31,6434

Abbildung 20

ENNEPER-RAND

2. Minimallösung

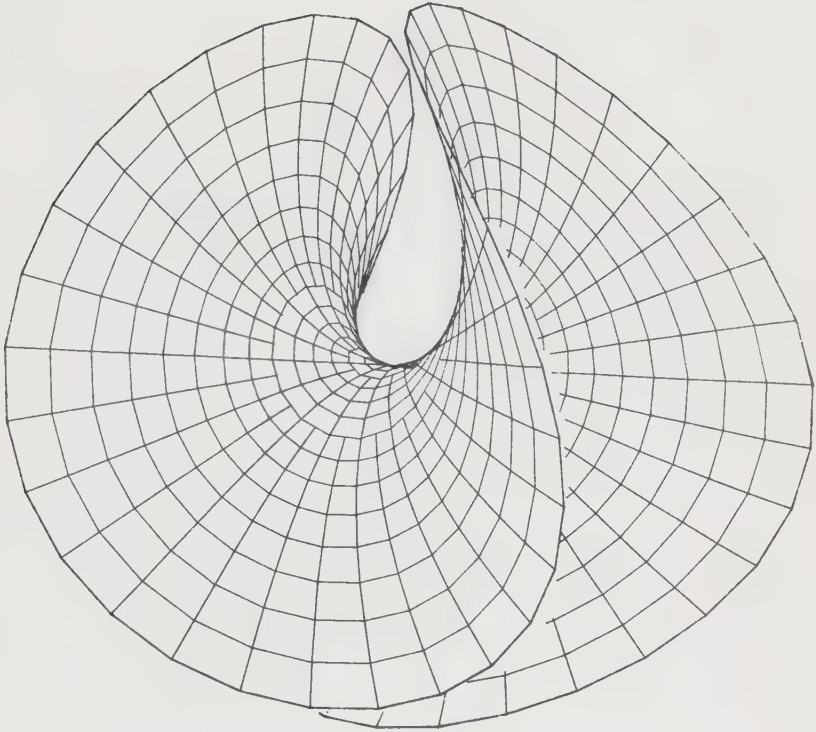


$D = 32,9589$ $A = 31,6434$

Abbildung 21

ENNEPER-RAND

ENNEPERFLÄCHE (instabil)



D = 34,7265

A = 34,6297

Ae = 34,9011

Abbildung 22

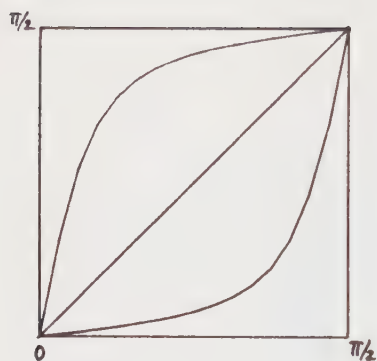


Abbildung 23

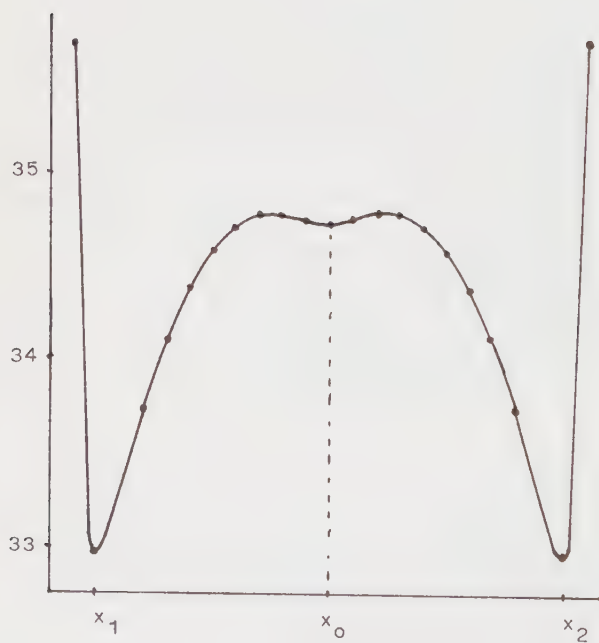
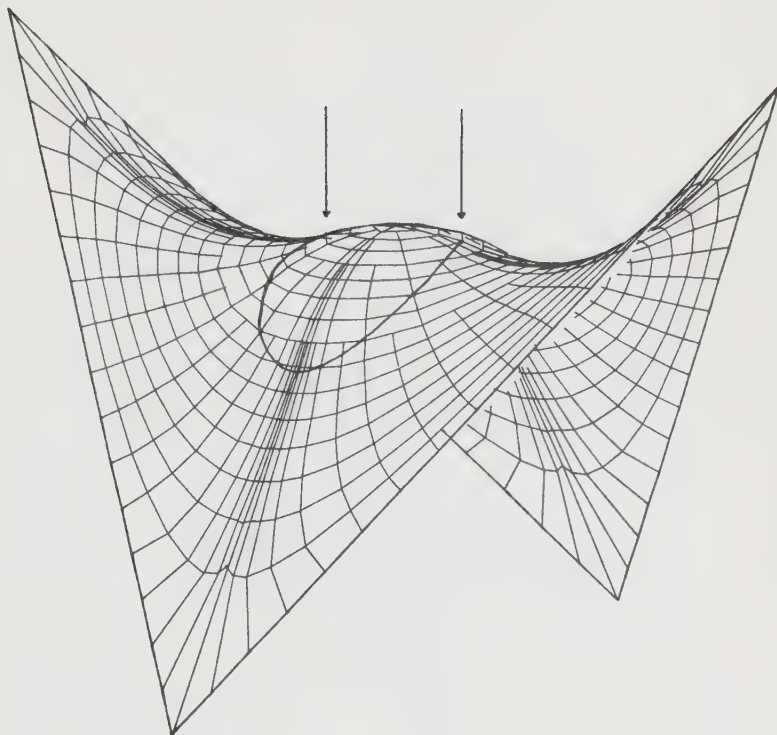


Abbildung 24

RIEMANN-SCHWARZ-FLÄCHE

mit Hindernis



$D = 0,709543$ $A = 0,673044$

Abbildung 25

PROJEKTION der RIEMANN-SCHWARZ-FLÄCHE
mit Hindernis

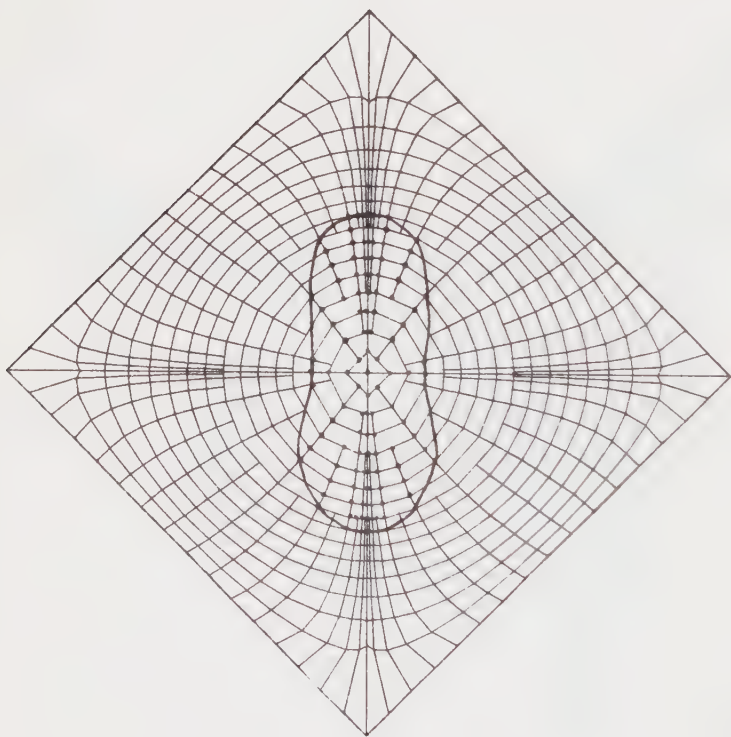


Abbildung 26

KONVERGENZORDNUNG

bei der

RIEMANN-SCHWARZ-FLÄCHE

F.-E.-Raum	D	A	D - Ae	A - Ae
S ₁	0,876955	0,648696	0,23733	0,00907
S ₂	0,752291	0,642985	0,11266	0,00335
S ₃	0,701685	0,640633	0,06206	0,00100
S ₄	0,675515	0,640007	0,03588	0,00038

Dabei war $Ae = 0,63963 \pm 3 \cdot 10^{-5}$

LITERATURVERZEICHNIS

- AUBIN, J.P. (1972) Approximation of Elliptic
Boundary Value Problems. Wiley-Interscience,
New York
- BANK, R.E. & DUPONT, T. (1977) An Optimal Order
Process for Solving Elliptic Finite Element
Equations. Preprint
- BECKENBACH, E.F. & RADÓ, T. (1933) Subharmonic
Functions and Minimal Surfaces.
Trans. A.M.S. 33, 263-321
- BERGH, J. & LÖFSTRÖM, J. (1976) Interpolation Spaces
Springer, Berlin
- BRAMBLE, J.H. & SCHATZ, A.H. (1971) Least Squares
Methods for 2mth Order Elliptic Boundary-Value
Problems. Math. Comp. 25, 113, 1-32
- BRANDT, A. (1977) Multi-Level Adaptive Solutions to
Boundary Value Problems.
Math. Comp. 31, 333-390

BROYDEN, C.G. (1969a) Recent Developments in Solving
Nonlinear Algebraic Systems.

in Rabinowitz, P.: Numerical Methods for Non-
linear Algebraic Equations. Gordon Breach
New York 1970

" (1969b) A New Method of Solving Nonlinear
Simultaneous Equations. Computer J. 12, 94-99

" (1969c) Algorithm 44 Computer J. 12, 406-408

BUS, J.C.P. (1976) A Comparative Study of Programs
for Solving Nonlinear Equations. 2nd edition
Stichtig Mathematisch Centrum, Amsterdam

CIARLET, P.G. (1978) The Finite Element Method for
Elliptic Problems. North-Holland, Amsterdam

CIARLET, P.G. & RAVIART, P.A. (1972a) General Lagrange
and Hermite Interpolation in R^n with Applications
to Finite Element Methods. Arch. Rat. Mech.
Anal. 46, 177-199

" (1972b) Interpolation Theory over Curved
Elements with Applications to Finite Element
Methods. Comp.Meth.Appl.Mech.Eng. 1, 217-249

CONCUS, P. (1967) Numerical Solution of the Minimal
Surface Equation. Math. Comp. 21, 368-381

„ (1968) Numerical Solution of the Minimal
Surface Equation by Block Nonlinear Successive
Overrelaxation. IFIP North-Holland, Amsterdam,
153-157

CONCUS, P. & GOLUB, G.H. & O'LEARY, D.P. (1978)
Numerical Solution of Nonlinear Elliptic
Partial Differential Equations by a Generalized
Conjugate Gradient Method. Computing 19, 321-339

COURANT, R. (1951) Dirichlet's Principle, Conformal
Mapping and Minimal Surfaces.
Wiley Interscience, New York

DAVIDON, W.C. (1975) Optimally Conditioned Optimization
Algorithms without Line Searches.
Math. Programming 9, 1-30

DOUGLAS, J. (1931) Solution of the Problem of Plateau
Trans. A.M.S. 33, 263-321

DUNFORD, N. & SCHWARTZ, J.T. (1964) Linear Operators.
Wiley Interscience, New York

- ECKHARDT, U. (1974) On an Optimization Problem Related to Minimal Surfaces with Obstacles.
in Optimization & Optimal Control (Oberwolfach)
Springer Lecture Notes in Math. 477
- FREHSE, J. (1969) Existenz und Konvergenz von Lösungen nichtlinearer Differenzengleichungen unter Dirichletrandbedingungen. Math. Z. 109, 311-343
- GABAY, D. & MERCIER, B. (1976) A Dual Algorithm for the Solution of Nonlinear Variational Problems via Finite Element Approximations.
Computer & Maths. with Appls. 2, 17-40
- GEORGE, A. (1973) Nested Dissection of a Regular Finite Element Mesh.
SIAM J. Num. Anal. 10, 345-363
- GEORGE, A. & LIU, J.W.H. (1978) Algorithms for Matrix Partitioning and the Numerical Solution of Finite Element Systems.
SIAM J. Num. Anal. 15, 297-327
- GEORGE, A. & McINTYRE, D.R. (1978) On the Application of the Minimum Degree Algorithm to Finite Element Systems. SIAM J. Num. Anal. 15, 90-112

GREENSPAN, D. (1965) On Approximating Extremals of Functionals. Part I: The Method and Examples of Boundary-Value Problems. ICC Bull. 4, 91-98

" (1967) On Approximating Extremals of Functionals. Part II: Theory and Generalizations Related to Boundary-Value Problems for Nonlinear Differential Equations.
Int. J. Engng. Sci. 5, 571-588

HACKBUSCH, W. (1977) On the Convergence of a Multi-Grid Iteration Applied to Finite Element Equations. Report 77-8, Univ. Köln, erscheint in Num. Math.

HILDEBRANDT, S. (1966) Über das Randverhalten von Minimalflächen. Math. Ann. 165, 1-18

HINATA, M. & SHIMASAKI, M. & KIYONO, T. (1974) Numerical Solution of Plateau's Problem by the Finite Element Method. Math. Comp. 28, 45-60

JAMET, P. (1976) Estimations d'Erreur Pour Des Elements Finis Droits Presque Degeneres.
RAIRO Anal. Num. 10/3, 43-61

- JOHNSON, C. & THOMÉE, V. (1975) Error Estimates for a
Finite Element Approximation of a Minimal Surface.
Math. Comp. 29, 343-349
- JOURON, C. (1975) Resolution Numérique Du Problem Des
Surfaces Minima. Arch. Rat. Mech. Anal. 59, 311-341
- KADALBAJOO, M.K. & JAIN, P.C. (1977) Invariant
Imbedding Approach for the Solution of the
Minimal Surface Equation.
J. Math. Anal. & Appl. 61, 643-657
- LIONS, J.L. & MAGENES, E. (1968) Problèmes Aux Limites
Non Homogènes. Dunod, Paris
- LIONS, J.L. & PEETRE, J. (1964) Sur Une Classe d'Espace
d'Interpolation. Publ. math. de l'institut des
hautes études scient. No 19, 5-68
- MEIS, T. (1971) Diskretisierung nichtlinearer ellip-
tischer Differentialgleichungen.
Computing 7, 344-352
- MITTELMANN, H.D. (1975) Numerische Behandlung des
Minimalflächenproblems mit finiten Elementen.

- MITTELMANN, H.D. (1978) On the Approximative Solution of Nonlinear Variational Inequalities.
Num. Math. 29/4, 451-462
- MORREY, C.B. (1966) Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Springer, Berlin
- MORSE, M. & TOMPKINS, C. (1939) The Existence of Minimal Surfaces of General Critical Types.
Ann. Math. 40, 443-472
- NEČAS, J. (1967) Les Méthodes Directes En Théorie Des Équations Elliptiques. Maason, Paris
- NICOLAIDES, R.A. (1977) On the l_2 -Convergence of an Algorithm for Solving Finite Element Equations.
Math. Comp. 31, 892-906
- NITSCHÉ, J.C.C. (1968) Contours Bounding at least three Solutions of Plateau's Problem.
Arch. Rat. Mech. Anal. 30, 1-11
- " (1969) The Boundary Behavior of Minimal Surfaces, Kellogg's Theorem and Branch Points on the Boundary. Invent. math. 8, 313-333

NITSCHÉ, J.C.C. (1973) A New Uniqueness Theorem for
Minimal Surfaces.

Arch. Rat. Mech. Anal. 52, 319-329

" (1975) Vorlesungen über Minimalflächen.
Springer, Berlin

" (1976) Non-Uniqueness for Plateau's Problem
- a Bifurcation Process.

Ann. Acad. Sc. Fennicae 2, 361-373

PARKS, H. (1977) A Method for Computing Non-Parametric
Area Minimizing Surfaces over n Dimensional
Domains together with *a priori* Error Estimates.
Indiana Uni. Math. J. 26, 625-644

PLATEAU, J. (1849) Sur Les Figures d'Équilibre d'Une
Masse Liquide Sans Poids.

Mém. acad. roy. Belgique, New Series, Vol. 23

POWELL, M.J.D. (1969a) A Hybrid Method for Nonlinear
Equations. in Rabinowitz, P.: Numerical Methods
for Nonlinear Algebraic Equations.

Gordon Breach New York 1970, 87-114

" (1969b) A Fortran Subroutine for Solving
Systems of Nonlinear Algebraic Equations.
in Rabinowitz, P.: Numerical Methods for Nonlinear
Algebraic Equations. Gordon Breach N.Y., 115-162

RADÓ, T. (1930a) On Plateau's Problem.

Ann. Math.(2), 31, 457-469

" (1930b) The Problem of the Least Area and
the Problem of Plateau. Math. Z. 32, 762-796

" (1932) Contributions to the Theory of
Minimal Surfaces.

Acta Litt. Scient. Univ. Szeged 6, 1-20

RANNACHER, R. (1977) Some Asymptotic Error Estimates
For Finite Element Approximations of Minimal
Surfaces. RAIRO Anal. Num. 11/2, 181-196

SHANNO, D.F. & PHUA, K.H. (1978) Matrix Conditioning
and Nonlinear Optimization.
Math. Programming 14, 149-160

STEIN, E.M. (1970) Singular Integrals and Differenti-
ability Properties of Functions.
Princeton Univ. Press, Princeton

STRANG, G. & FIX, G.J. (1973) An Analysis of the Finite
Element Method. Prentice Hall, Englewood Cliffs

TOMI, F. (1970) Ein teilweise freies Randwertproblem
für Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung.
Math. Z. 115, 104-112

„ (1971) Minimal Surfaces and Surfaces of
Prescribed Mean Curvature over Obstacles.
Math. Ann. 190, 248-264

„ (1972) Variationsprobleme vom Dirichlet-Typ
mit einer Ungleichung als Nebenbedingung.
Math. Z. 128, 43-74

„ (1973) On the Local Uniqueness of the Problem
of Least Area. Arch. Rat. Mech. Anal. 52, 312-318

USPENSKII, S.V. (1962) Properties of Generalized
Sobolev Spaces W_p^r . AMS Transl. (2) 90, 45-79
(1970). Sibirsk. Mat. Z. 3, 418-445

WAGNER, H.J. (1977) Ein Beitrag zur numerischen Appro-
ximation von Minimalflächen. Computing 19, 35-58

„ (1978) Consideration of Obstacles in the
Numerical Approximation of Minimal Surfaces.
Computing 19/4, 375-380

WILSON, W.L., Jr. (1961) On Dirichlet and Plateau
Problems. Num. Math. 3, 359-373

" (1962) D-Minimal Surfaces Spanning Polygons
in E_n by Solving a Linear System.
Num. Math. 4, 328-329

LEBENS LAUF

Ich, Helmut Jarausch, wurde am 3. 9. 1949 als Sohn des Diplomingenieurs Dr. Rudolf Jarausch und seiner Frau Irmgard, geb. Homann, in Duisburg geboren.

Nach einem Besuch der Grundschule von 1956 bis 1960 bestand ich 1960 die Aufnahmeprüfung für das naturwissenschaftliche Mercator-Gymnasium in Duisburg.

Nach meinem Abitur im Jahre 1968 begann ich im Wintersemester dieses Jahres mit meinem Studium an der Westfälischen Wilhelmsuniversität Münster in den Fachrichtungen Mathematik und Physik. Dort bestand ich 1970 das Vordiplom in Mathematik und Physik.

Seit 1970 wurde ich von der Studienstiftung des Deutschen Volkes e.V. unterstützt. In der Zeit von 1970 bis 1975 war ich als studentische Hilfskraft zunächst am mathematischen Institut und später am Rechenzentrum der Universität beschäftigt.

Meine Diplomprüfung in Mathematik mit der Diplomarbeit 'Über die Existenz von instabilen Lösungen für das Plateau-Problem für Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung' bei Prof. Dr. W. Jäger bestand ich im Herbst 1975.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich zum überwiegenden Teil den Herren Professoren Braess, Gerritzen, Jäger, Kamphuesmann, Kiehl, Nastold, Peterson, Plachky, Remmert, Rödding, Schaback, Spallek, Tomi und H. Werner.

Seit Oktober 1975 bin ich als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle an der Universität Bochum am Lehrstuhl von Prof. Dr. D. Braess tätig.

Im Dezember 1975 heiratete ich Christa Jarausch, geb. Cordes.

Im September 1978 verstarb für mich völlig überraschend mein geliebter Vater, der mir immer ein großes Vorbild war und sein wird.

difo
druck

laubanger 15
8600 bamberg
tel.: 09 51/6 43 21